

Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

1997 рік

1. Довести, що число $\sqrt{\underbrace{44\dots4}_{2n} - \underbrace{88\dots8}_n}$ ціле і знайти його.

2. Довести, що для всіх дійсних чисел a і b ($a \neq 0, b \neq 0$) виконується нерівність

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4 \geq 0.$$

Для яких значень a і b досягається рівність?

3. Скільки розв'язків в залежності від параметра a мають рівняння:

(a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = a;$

(b) $|x^2 - 2|x|| = a.$

4. При яких значеннях параметра a нерівність

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$$

виконується для усіх дійсних значень x ?

5. Розв'язати рівняння

$$4^x = 15^{\frac{x}{2}} + 1.$$

6. Побудувати графіки функцій:

(a) $y = \cos x \cdot |\operatorname{tg} x|;$

(b) $y = \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x+1}}} \div \frac{1}{x\sqrt{x-1}} + \sqrt{x};$

(c) $y = \log_2 \sqrt{|1+x|}$

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}.$$

8. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x - \cos 2\alpha)^2 + (y - 2\alpha)^2 = 1, \\ (y - 2\pi)^2 = x - 2. \end{cases}$$

9. Розв'язати рівняння:

(a) $\sqrt{2 \cos^2 x - 1} = \cos \frac{3}{2}x;$

(b) $|x + 8| + |x - 11| = 19 \sin x.$

10. Дослідити, чи має рівняння $(\cos x - \sin x)(1 + \sin 2x) = \sqrt{2}$ дійсні розв'язки. Відповідь обґрунтувати.

11. Розв'язати нерівності:

(a) $\sqrt{4 \cos^2 x - 1} \cdot \log_{\cos x} \left(\frac{x-5}{2x-1} \right) \geq 0;$

(b) $\log_{|1-x|} (x^2 + x - 2) \geq 1.$

12. Довести, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло тоді і тільки тоді, коли $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, де O — точка перетину діагоналей чотирикутника.
13. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника точкою перетину діляться на відрізки, відношення яких, рахуючи від вершин, дорівнює λ . Знайти кути такого трикутника.
14. Побудувати трикутник за бічними сторонами та різницею кутів при основі.
15. Грані призми — ромби зі стороною a та гострим кутом α . Знайти об'єм призми.
16. Ребро куба дорівнює a . Знайти віддаль між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю грані куба.