Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

1998 рік

1. Нехай $a < b < c$. Довести, що рівняння $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ має рівно два корені x_1 і x_2, які задовольняють нерівності $a < x_1 < b < x_2 < c$.

2. Чи можна в коло, у якого принаймні одна із координат центру є ірраціональним числом, вписати трикутник, у якого всі координати вершин є раціональними числами? Відповідь обґрунтувати.

3. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2^{|y|} + |y| - y^2 = x - a. \end{cases}$$

має лише один розв'язок? Знайти цей розв'язок.

4. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$$

5. Розв'язати нерівність

$$|x-4|^{\log_{x-4}(x^2-11x+30)} \geqslant 7x - x^2 - 10.$$

6. Розв'язати рівняння

   (a) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$,

   (b) $8\cos^2 x + 15[\cos x] + 9 = 0$,

   де $[x]$ — ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

7. Побудувати графік функції $y = f(x)$. Дослідити, скільки розв'язків має рівняння $f(x) = a$ в залежності від параметра a:

   (a) $f(x) = \operatorname{tg}|x| \cdot \operatorname{ctg} x$;

   (b) $f(x) = \log_{|x+5|-|x+3|} \frac{1}{2}$;

   (c) $f(x) = x^2 + [x]$,

   де $[x]$ — ціла частина числа x.

8. Парною чи непарною є функція

$$f(x) = \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}?$$

Відповідь обґрунтувати.

9. Розв'язати рівняння:

   (a) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = \frac{2xy}{3\pi^2} + \frac{3\pi^2}{2xy}$;

   (b) $\sin 5x \cdot \cos 7x + \sin 8x \cdot \cos 6x = 1$.

10. (a) Довести, що для кутів α, β, γ непрямокутного трикутника виконується рівність

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

(b) Довести нерівність $\operatorname{tg} 44^{\circ} + \operatorname{tg} 45^{\circ} + \operatorname{tg} 46^{\circ} > 3$.

11. Довести, що при будь-якому значенні параметра a рівняння

$$x(x^2-1)(x^2-10)=a$$

не може мати п'ять цілих коренів.

12. У даний гострокутний трикутник вписати трикутник найменшого периметра.

13. Побудувати трикутник за A, p, h_a.

14. У трикутнику ABC проведені бісектриси AA_1, BB_1, CC_1. Відомо, що $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$. Знайти кути такого трикутника.

15. У просторі задані три рівні відрізки. Довести, що існує така площина, що проекції даних відрізків на цю площину рівні між собою.

16. Усі плоскі кути при вершині D трикутної піраміди $ABCD$ прямі. В піраміду вписано куб так, що одна з його вершин співпадає з вершиною D піраміди, а протилежна їй вершина належить грані ABC. Обчислити довжину ребра куба, якщо $DA=a, DB=b, DC=c$.