Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

1999 рік

1. Знайти співвідношення між коефіцієнтами a, b, c ($a > 0, b > 0, c >$), при виконанні яких система рівнянь
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0, \\ bx^2 + cx + a = 0, \\ cx^2 + ax + b = 0. \end{cases}$$
має розв'язки. Знайти ці розв'язки.

2. Розв'язати рівняння:
   (a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$;
   (b) $\sin^{1998} x + \cos^{1998} x + \sin^{1999} x = 2$;
   (c) $\sin x \cdot \sin(x+y) = 1 + (2x + y + 3\pi)^2$.

3. Розв'язати рівняння
$$[\sin x] = x^2 - 3x = 2,$$
де $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

4. Зобразити на координатній площині xOy множину точок, координати яких задовольняють співвідношення:
   (a) $|y| + 2^{\log_2 |x|} = 1$;
   (b) $\sin \pi y \leqslant x \leqslant \cos \pi y$.

5. При яких значеннях параметра a рівняння
$$a^2 \cos \pi x - a(1 + 2x^2) - 6 = 0$$
має лише один розв'язок? Знайти його.

6. При яких значеннях параметра a система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 5y = z, \\ x + y + z = a \end{cases}$$
має лише один розв'язок? Знайти цей розв'язок.

7. Розв'язати нерівності:
   (a) $\log_M 2\left|x + \frac{1}{4}\right| > 0$, де $M = \frac{2}{\pi} \arccos x$;
   (b) $9^x + (x - 13)3^x + 36 - 9x > 0$;
   (c) $\left|x - \frac{1}{4}\right|^Q \geqslant 1$, де $Q = |x - 1| - \frac{1}{4}$.

8. (a) Знайти найбільше та найменше значення функції
$$f(x) = 8\sin^2 x + 10\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x;$$
   (b) Знайти найбільше значення функції
$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{3}}.$$

9. Чи є періодичною функція $f(x) = \cos x \cdot \cos \sqrt{5}x$? Відповідь обґрунтувати.

10. Довести, що всі дотичні до гіперболи $y = \frac{a}{x}$ відтинають від координатних осей трикутники однакової площі.

11. Довести, що трикутник з кутами α, β, γ буде прямокутним тоді і тільки тоді, коли $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$.

12. В коло вписано трапецію, основою якої є діаметр кола, і рівнобедриний трикутник, сторони якого паралельні сторонам трапеції. Довести, що площі трапеції і трикутника рівні між собою.

13. Побудувати паралелограм, якщо відомо відношення його діагоналей, кут між діагоналями і висота.

14. Для того, щоб в опуклий чотирикутник можна було вписати коло, необхідно і достатньо, щоб суми довжин протилежних сторін такого чотирикутника були рівні. Довести це.

15. Знайти найбільшу площу перерізу трикутної піраміди $ABCD$ площиною, яка паралельна ребрам BC і AD, якщо $BC = a, AB = c, AD = b$, а кут між ребрами AD і BC дорівнює α.