

Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2002 рік

1. Знайти всі значення k , для яких обидва корені рівняння $x^2 - (k+1)x + 3k = 0$ є цілими числами.

2. Розв'язати рівняння

$$\cos(\pi \log_2(x-4)) \times \cos(\pi \log_2(x-1)) = 1.$$

3. Знайти всі цілі числа x , для яких число $3 \times 2^x + 1$ є квадратом цілого числа.

4. З усіх квадратних тричленів $f(x) = ax^2 + bx + c$, таких що $f(1) = 5$, $f(5) = 1$, знайти той, для якого число $ca(1+b)(1+c)$ є найменшим.

5. Знайти всі значення параметра a , при яких функція

$$y = 8ax - a \sin 6x - 7x - \sin 5x$$

зростає на проміжку $(-\infty; \infty)$.

6. При яких a існує рівно чотири значення x на проміжку $[3\pi/2; 2\pi]$, для яких

$$\sin^2 4x + (a^2 - 3) \sin 4x + a^2 - 4 = 0?$$

7. На координатній площині xOy зобразити множину точок, для яких $2y - 1 - \frac{1}{2}y - 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$. Довести, що ця множина є графіком деякої функції $y = f(x)$, знайти область визначення і множину значень цієї функції. При якому значенні параметра a функція $y = f(x+a)$ буде парною?

8. Розв'язати нерівність

$$\log_2(6-x) \leq 2^{x-1}.$$

9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x - 3$ та $y = 1 - (8 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

10. Довести, що в правильній 5-кутній піраміді для кожного її ребра існує інше ребро, перпендикулярне до даного.

11. Площа трикутника, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника ABC в чотири рази менша від його площі. Довести, що трикутник ABC — рівнобічний.

12. Скільки коренів має рівняння

(a) $16 \times 2^{-|x|} \sin(\pi x) = 1$?

(b) $x^5 - 2x^3 = a - x$?

13. Нехай O — точка перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$. Довести, що

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

14. Скільки існує п'ятицифрових чисел, всі цифри яких різні?

15. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються і жодні три не мають спільної точки. На скільки частин ділять площину ці кола?

16. Знайти найбільший член послідовності a_n , якщо

(a) $a_n = (12 - |7 - n|) \times \cos \pi n$;

(b) $a_n = 10n^2 - n^3$.

17. Висота конуса дорівнює h , а його твірні нахилені до площини основи під кутом α . Перпендикулярна до висоти конуса площина ділить повну поверхню конуса навпіл. Знайти відстань від цієї площини до площини основи конуса.