Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2004 рік

1. Не використовуючи таблиці, з'ясувати знак виразу

$$4e^{\arcsin(1/6)} - 3e^{\arcsin(1/9)} - e^{\arcsin(1/3)}.$$

2. В трикутнику PQL проведено середню лінію AB, що з'єднує сторони PQ та QL. Довжина сторони PL дорівнює $\sqrt{2}$, $\sin\angle PLQ = 1/3$. Знайти радіус кола, що проходить через точки B, L та дотикається сторони PQ в точці A.

3. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos(2\pi(|x| + 2a)) = 1$$

   (a) не має розв'язків,

   (b) має безліч розв'язків,

   (c) має п'ять розв'язків?

4. Знайти всі значення параметра k, при кожному з яких принаймні для одного значення b рівняння

$$|x^2 - 1| + kx = |x^2 - 8x + 15| + b$$

   має:

   (a) більше п'яти коренів;

   (b) п'ять коренів.

5. Довести, що для чисел x, y, z відрізка $[0, 1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}} + \frac{y}{\sqrt{1+zx}} + \frac{z}{\sqrt{1+xy}} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)}.$$

6. Для заданих чисел A, B, C, D будуємо нові чотири числа $A_1 = |A-B|$, $B_1 = |B-C|$, $C_1 = |C-D|$, $D_1 = |D-A|$. Після цього з чисел A_1, B_1, C_1, D_1 утворюємо за аналогічним правилом нові чотири числа A_2, B_2, C_2, D_2 і т.д. до нескінченності. Чи завжди після скінченної кількості кроків отримаємо чотири нулі, якщо

   (a) A, B, C, D — довільні додатні раціональні числа;

   (b) A, B, C, D — довільні додатні дійсні числа?

7. Функція f визначена на проміжку $[1, 5]$ та має на ньому похідну. Довести, що існує значення $x \in [1, 5]$, для якого $f'(x) - f^2(x) < 1$.

8. Розв'язати в натуральних числах рівняння $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$.

9. Розглянемо множину рівнобедрених трикутників, основи яких лежать на заданій прямій l, одна з вершин основи розташована в заданій точці $A \in l$, та радіус вписаних кіл яких дорівнює заданій величині r. Доведіть, що усі бічні сторони цих трикутників, що не проходять через точку A, дотикаються до одного з двох кіл.

10. Чи завжди серед шістнадцяти точок у просторі можна вибрати чотири точки такі, що усі шість попарних відстаней між ними мають різні значення?