Завдання з математики
заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2006 рік

Група "A"

1. Розв'язати рівняння в цілих числах:

$$k^4 + (k+1)^4 + (k+2)^4 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2.$$

2. На основі BC рівнобедреного трикутника ABC взяли точку D. Півколо з діаметром CD та центром в точці O дотикається сторони AC в точці M. Знайти довжину бісектриси OL трикутника BOA, якщо $AM = 1$ і $BD = 2/\sqrt{7}$.

3. Знайти найменшу можливу сторону правильного трикутника, всередині якого можна розмістити п'ять однакових трикутників зі стороною 1 таким чином, щоб вони не мали спільних внутрішніх точок.

4. Знайти усі натуральні n, при якому для всіх дійсних чисел x має місце нерівність:

$$\sin^n x + \sin^{n-1} x \cos x + \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + \sin x \cos^{n-1} x + \cos^n x = \sin x + \cos x.$$

5. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ довільні дійсні числа такі, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Довести нерівність:

$$\sqrt{\max\{x_1, 0\}} + \ldots + \sqrt{\max\{x_n, 0\}} \leqslant (\min\{x_1, 0\})^2 + \ldots + (\min\{x_n, 0\})^2 + \frac{n}{4}.$$

6. При всіх значеннях параметра a розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \leqslant a \leqslant -x^2 + 6x - 1, \\ a \leqslant 3x - 1. \end{cases}$$

7. Знайти усі значення параметра a, при яких наведена система рівнянь має рівно 3 розв'язки:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz + 9, \\ xyz = a. \end{cases}$$

8. На декартовій площині відмітили точки $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$, а також коло, що задається рівнянням $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$. Знайти на цьому колі точку C, для якої $\angle ACB$ мінімальний.

9. Знайти найменше натуральне число, що починається з цифри 9 і яке стає в 4 рази меншим, якщо цю цифру переставити в кінець числа, не змінюючи порядок інших цифр.

10. На ребрах правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з вершиною в точці S задані точки $M \in SA$, $N \in SB$, $K \in SD$ так, що $SM : MA = 3 : 1$, $SN = NB$, $SK : KD = 1 : 3$. Площина MKN перетинає ребро SC в точці L. Знайти відношення $SL : LC$.

Група "B"

Для кожної запропонованої задачі необхідно написати алгоритм з обґрунтуванням коректності розв'язку та програмну реалізацію на C або Паскалі. Дозволяється застосовувати лише власноруч написані підпрограми. Дискету з програмною реалізацією надсилати не треба.

1. **Точки перетину.** Є дві паралельні прямі лінії. На першій з них вибрано a точок, а на другій — b точок. Будь-які дві точки з різних прямих з'єднані відрізком. Точки на прямих вибрані так, що кількість точок перетину утворених відрізків найбільша. Обчислити цю кількість. На вході задається два числа a і b ($0 \leqslant a \leqslant 20000, 0 \leqslant b \leqslant 20000$).

2. **Діагональ.** Кількість діагоналей в опуклого n-кутника не менше N. Чому дорівнює найменше можливе значення n? На вході задається ціле число N ($N \leqslant 10^{15}$) — кількість проведених діагоналей, а вивести треба кількість кутів n-кутника.

3. **Просте число.** По заданому натуральному числу n знайти максимальний степінь числа m (не обов'язково простого) x, при якому m^x ділить $n!$. На вході задаються числа m та n, x виводиться.

4. **Пошук.** У кімнаті є n дверей. Якщо відкрити двері з номером i, то або через x_i годин ви потрапите в безпечне місце, або через x_i годин знову повернетеся в цю ж кімнату. Обчислити очікуваний час P (в годинах), через який можна вибратися з кімнати в безпечне місце. На вході задається число дверей n ($1 < n < 100$), а далі — n пар чисел x_i, $0 < |x_i| < 25$ (якщо додатне — то це час, за який можна потрапити в безпечне місце, якщо ж від'ємне — то це час, через який ви знову потрапите в кімнату) та p_i — ймовірність відкрити i-ті двері. Сума всіх p_i дорівнює 1. Вивести необхідно P — час виходу в безпечне місце, або повідомлення, що це зробити неможливо.