

Завдання з математики заочного туру олімпіади факультету кібернетики

2008 рік

Група "А"

1. Продовжити послідовність чисел одним числом: 1, 10, 12, 21, 100, 102, 111, ... Відповідь обґрунтуйте.
2. розглянемо гострокутний трикутник ABC і точку D , що лежить на стороні BC . Позначимо P, Q — точки перетину висот $\triangle ABD$ та $\triangle ADC$. Для яких точок D трикутники ABC і DPQ будуть подібними?
3. Дорога між містами A і B спочатку йде згори, а потім ще половину цієї відстані вгору. Вгору мотоцикліст їхав з постійною швидкістю від 30 до 40 км/год, а згори вдвічі швидше, ніж вгору. Коли він проїхав весь шлях, то виявилося, що на перші 100 км шляху він витратив на 1 годину менше, ніж на останні 100 км. Скільки часу тривала його подорож від A до B ?
4. Племя людоджерів взяло в полон красуню білявку. Відпустити її чи з'їсти має вирішити зібрання 100 старійшин, які дуже люблять банани. "Доброму" вождю людоджерів білявка дуже сподобалася, і він хоче прийняття зборами рішення про її звільнення, але "зла" дружина вождя проти цього. При вирішенні долі білявки кожен старійшина віддасть свій голос за ту пропозицію, за яку одержить більше бананів. Якщо старійшина одержує однакову кількість бананів від протилежних сторін, то при голосуванні він утримується. Щоб будь-яке рішення було прийнято необхідно, щоб "ЗА" проголосував принаймні 51 старійшина. Вождь знає, що дружина може роздати старійшинам не більше 1000 бананів. Яку мінімальну кількість бананів і по скільки повинен роздати вождь, щоб гарантувати прийняття рішення на свою користь, незважаючи на те, у який спосіб роздасть банани його дружина.
5. Розв'язати рівняння: $\sin(\sin(\sin x)) = \cos(\sin(\sin x))$.
6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}, \\ \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2z}}. \end{cases}$$

7. З точки M кола проведені три хорди $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$ таким чином, що $\angle NMP = \angle PMQ$. Знайти радіус кола.
8. При яких значеннях параметра a рівняння $a \sin^4 x + 4(a + 1) \sin^2 x + 3(a + 1) = 0$ має не більше двох розв'язків на проміжку $[0, \pi]$?
9. У трикутника ABC задані сторона $BC = a$ та $\angle BAC = \alpha$. В яких межах може змінюватися висота $h_b = BH$ цього трикутника?

Група "В"

Для кожної запропонованої задачі необхідно написати алгоритм з обґрунтуванням коректності розв'язку та програмну реалізацію на C або Паскалі. Дозволяється застосовувати лише власноруч написані підпрограми. Дискету з програмною реалізацією надсилати не треба.

1. **Сортуюча машина.** Є машина для сортування цілих чисел. Вона має лише одну команду MOVE з одним аргументом. Ця команда переносить число, задане в аргументі, в кінець послідовності. Наприклад, для сортування масиву чисел $\{19, 7, 8, 25\}$ у зростаючому порядку слід виконати дві команди:

1. MOVE 19, отримаємо $\{7, 8, 25, 19\}$.

2. MOVE 25, отримаємо $\{7, 8, 19, 25\}$.

Вхід. Масив чисел a .

Вихід. Найменша кількість команд MOVE, необхідних для сортування масиву a за зростанням.

Обмеження: $-1000 \leq a[i] \leq 1000$.

| Вхід | Вихід |
|---------------------------------|-------|
| a | |
| $\{19, 7, 8, 25\}$ | 2 |
| $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | 0 |
| $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2\}$ | 7 |

2. **Загублені дужки.** Є арифметичний вираз, що містить додатні числа, знаки '+', '-' та дужки. Потім дужки стерли. Необхідно визначити найменше значення, яке могло мати вихідний арифметичний вираз.

Вхід. Рядок e , що містить арифметичний вираз без дужок.

Вихід. Найменше значення, яке може мати арифметичний вираз, якщо в ньому розставити дужки.

| Вхід | Вихід |
|---------------|-------|
| e | |
| "55-50+40" | -35 |
| "10+20+30+40" | 100 |
| "00009-00009" | 0 |

3. **Підрахунок спільних підпоследовностей.** Підпоследовність утворюється з рядка вилученням нуля або декількох символів з нього. За заданими трьома рядками слід підрахувати кількість їх спільних підпоследовностей.

Вхід. Три рядки a, b та c .

Вихід. Кількість спільних підпоследовностей трьох рядків a, b та c .

| Вхід | | | Вихід |
|------------|--------------|------------|-------|
| a | b | c | |
| "call" | "accelerate" | "candle" | 6 |
| "topcoder" | "topcoder" | "topcoder" | 239 |
| "no" | "correct" | "answer" | 0 |

4. **Щасливе число.** Нехай n — натуральне число. Піднесемо в k -у степінь кожен його цифру і просумуємо отримані результати. Позначимо отриманий результат через $S_k(n)$. Наприклад, $S_2(65) = 6^2 + 5^2 = 61$. Побудуємо послідовність $n, S_k(n), S_k(S_k(n)), \dots$. Щастям числа n по відношенню до k будемо називати найменше число в цій послідовності.

Вхід. Три числа a, b, k .

Вихід. Знайти щастя кожного числа між a та b включно по відношенню до k і повернути їх суму.

| Вхід | | | Вихід |
|------|-----|---|-------|
| a | b | k | |
| 13 | 13 | 2 | 1 |
| 1 | 5 | 2 | 14 |
| 535 | 538 | 3 | 820 |

5. **Паралельне програмування.** Існує складна система, що містить в собі декілька паралельно працюючих процесорів. Але деякі процесори можуть почати роботу лише тоді, коли інші закінчують свою роботу. i -тий елемент масиву `time` містить час виконання роботи i -тим процесором (в мілісекундах). Інформація про залежність виконання робіт міститься в масиві `prec`: `prec[i][j]` містить 'Y', якщо процесор j може почати роботу лише по завершенню роботи процесора i , та 'N', якщо час роботи i -го та j -го процесорів не залежить один від іншого.

Вхід. Масив `time`, який містить час роботи процесорів та масив `prec`, що описує залежність виконання робіт процесорів.

Вихід. Найменший час (в мілісекундах), необхідний для виконання робіт усіма процесорами. Якщо роботи виконати неможливо, повернути -1.

| Вхід | | Вихід |
|-------------------|-----------------------------|-------|
| <code>time</code> | <code>prec</code> | |
| {150, 200, 250} | {"NNN", "NNN", "NNN"} | 250 |
| {150, 200, 250} | {"NNN", "YNN", "NNN"} | 350 |
| {150, 200, 250} | {"NYN", "NNY", "YNN"} | -1 |