

**ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО  
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА:  
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ**

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на факультет кібернетики.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати поштою або передати особисто до факультету кібернетики (проспект академіка Глушкова, 4д, кімн.29) не пізніше 10 квітня 2011 року розв'язки задач першого туру у зошиті, а також 2 поштових конверти із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

**АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ**

Прізвище \_\_\_\_\_  
Ім'я \_\_\_\_\_  
По-батькові \_\_\_\_\_  
Область \_\_\_\_\_  
Місто, село \_\_\_\_\_  
Номер школи, клас \_\_\_\_\_  
Адреса школи, телефон \_\_\_\_\_  
Домашня поштова адреса \_\_\_\_\_  
Контактний телефон \_\_\_\_\_  
Електронна адреса (E-mail) \_\_\_\_\_

Зошити надсилаються за адресою:

01033, Київ-33,

Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

журі олімпіади 2011,

факультет кібернетики, кімн.29

телефон для довідок (044) 521-35-54

**Витяг з правил прийому  
до Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2011 році**

Пункт 11.1. Право на першочергове зарахування до Київського національного університету імені Тараса Шевченка мають:

- .....
- переможці та призери Олімпіади для школярів Київського національного університету імені Тараса Шевченка, яка проводиться в поточному навчальному році.

Олімпіада факультету кібернетики  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка  
2011 року

**МАТЕМАТИКА**  
(Заочний тур)

1. Розв'язати рівняння  $[x]\{x\} = 2011x$ , де  $[x]$  позначає найбільше ціле число, що не перевищує  $x$ , а  $\{x\} = x - [x]$ .

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{\pi - 2}{2} + \frac{2}{1 + \cos(2\sqrt{x})} + \arcsin(x^3 - 8x - 1) = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} - \sqrt{x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 24}$$

3. Знайти найбільше та найменше значення виразу  $\cos A + \cos B + \cos C$ , де  $A, B, C$  – кути трикутника.

4. Послідовність  $\{x_n\}$  задана співвідношеннями  $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, n \geq 1$ . Обчислити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

5. Числа  $x, y, z$  такі, що  $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$ . Яке найбільше значення може приймати вираз  $2x + y - z$ ?

6. Знайти усі значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $\sqrt{x+a} = x$  має розв'язки, які належать проміжку  $[0; 1]$ .

7. В трапеції  $KLMN$  відомо, що  $LM \parallel KN, \angle KLM = \pi / 2, LM = l, KN = k, MN = a$ . Коло проходить через точки  $M$  та  $N$  і дотикається прямої  $KL$  в точці  $A$ . Знайдіть площу трикутника  $AMN$ .

8. У піраміді  $SABC$  відомо, що  $AB = 7, BC = 8, CA = 9$ . Висоти бічних граней, проведених з вершини  $S$ , є дотичними до сфери, вписаної у піраміду. Радіус цієї сфери дорівнює  $\sqrt{5}/2$ . Знайдіть об'єм піраміди.

9. У трикутнику  $ABC$  відомий кут  $\angle BAC = \pi / 4$ . Пряма, паралельна стороні  $AC$ , перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  в точках  $M$  та  $N$  відповідно. На відрізках  $AN$  та  $CM$  як на діаметрах побудовані кола. Їх спільна хорда перетинає відрізок  $MN$  в точці  $D$ , при чому  $MD : DN = \sqrt{3} : 1$ . Знайдіть величину кута  $\angle BCA$ .

10. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = \frac{1}{2^x + a} + \frac{1}{2}$  є непарною?

**ІНФОРМАТИКА**  
(Заочний тур)

1. **Монети.** У Вас є монети номіналом 1, 2, 5, 10, 25 та 50 копійок у нескінченній кількості. Скількома способами можна видати одну гривню?

2. **Піца.** На яку найбільшу кількість частин можна розрізати круглу піцу, зробивши 50 прямолінійних розрізів ножем? Наприклад, трьома розрізами піцу можна розділити максимум на 7 частин.

3. **Підпоследовності.** Розглянемо цілочисельну последовність  $x_i$ , яка задана наступним чином:

$$x_0 = 2, x_i = (x_{i-1} + 3) \% 7 + 1, i = 1, 2, \dots, 100$$

Послідовною підпослідовністю будемо називати послідовність вигляду  $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_l\}$ , де  $0 \leq k \leq l \leq 100$ . Послідовну підпослідовність будемо називати *гарною*, якщо сума усіх її елементів ділиться на 7. Для наведеної послідовності  $x_i$  знайти кількість гарних послідовних підпослідовностей.

**4. НСД.** Розглянемо наступне співвідношення, за допомогою якого можна обчислити найбільший спільний дільник (НСД) двох чисел:

$$\text{НСД}(a, b) = \begin{cases} a, b = 0 \\ \text{НСД}(b, a \bmod b), b \neq 0 \end{cases}$$

Наприклад, якщо  $a = 14, b = 78$ , то

$$\text{НСД}(14, 78) = \text{НСД}(78, 14) = \text{НСД}(14, 8) = \text{НСД}(8, 6) = \text{НСД}(6, 2) = \text{НСД}(2, 0) = 2$$

Обчислення  $\text{НСД}(14, 78)$  вимагає 6 викликів функції НСД. Позначимо через  $f(a, b)$  функцію, що дорівнює кількості викликів функції НСД при обчисленні  $\text{НСД}(a, b)$  за вказаним співвідношенням. Таким чином  $f(14, 78) = 6$ .

Знайти таку пару чисел  $a, b$  ( $1 \leq a \leq b \leq 150$ ), для якої значення  $f(a, b)$  є максимально можливим. Знайти значення  $f(a, b)$  для такої пари. Якщо шуканих пар декілька – то знайти хоча б одну з них.

**5. Круглий стіл.** За круглим столом зібралося 10 товаришів. Перед розмовою вони вирішили одночасно потиснути один одному руки. Руки жодних товаришів не повинні перетинатися. Скількома способами вони можуть це зробити?

Олімпіада факультету кібернетики  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка  
2010 року

Заочний тур  
(МАТЕМАТИКА)

1. Неважко навести приклад трьох різних натуральних чисел, сума кубів яких дорівнює кубу натурального числа. Чи існують 2009 різних натуральних чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$  та натуральне число  $b$  такі, що  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2009}^3 = b^3$ ?

2. Нехай  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  – кути трикутника. Встановіть:

а) яке найменше значення може приймати сума  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ ?

б) яке найбільше значення може приймати добуток  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$ ?

3. В тетраедрі протилежні ребра попарно рівні  $a, b, c$ . Знайдіть відстані між ними.

4. Чи можна розфарбувати клітинки дошки розміром  $n \times n$  у 2 кольори таким чином, щоб будь-які 4 клітини, що стоять на перетині довільних 2 різних стовпчиків та 2 різних рядків, не були пофарбовані в один колір, якщо:

а)  $n = 4$ ;

б)  $n = 5$ ?

5. Нехай  $x, y, z$  – цілі числа, які задовольняють рівність  $yx^2 + (y^2 - z^2)x + y(y - z)^2 = 0$ .

а) Доведіть, що число  $xy$  є повним квадратом.

б) Доведіть, що існує нескінченно багато трійок  $(x, y, z)$ , які задовольняють цю рівність.

6. Нехай  $ABC$  – рівнобедрений трикутник з основою  $AB$ ,  $A'$  – основа висоти, проведеної з вершини  $A$ . Доведіть: якщо  $CA' = \frac{1}{2}AB$ , то трикутник  $ABC$  – рівносторонній.

7. Знайдіть найменше трицифрове число, що має таку властивість: число, яке утричі більше за нього, має лише парні цифри в десятковому запису.

8. Чи існують опуклий 5-кутник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  та точка  $X$  всередині цього 5-кутника такі, що виконуються умови  $XA_1 = A_3A_4$ ,  $XA_2 = A_4A_5$ ,  $XA_3 = A_5A_1$ ,  $XA_4 = A_1A_2$ ,  $XA_5 = A_2A_3$ ?

9. Два пірати ділять купу діамантів загальною вагою  $S$ . Відомо, що найбільший з діамантів важить  $M$ . Вони ділять усю купу на дві менші купки вагою  $S_1$  та  $S_2$ , де  $S_1 \leq S_2$ , а потім жеребом вирішують, яка кому дістанеться. Доведіть, що:

а)  $S_1 \leq S - M$ ;

б) пірати можуть таким чином поділити купу, щоб  $S_1 \geq \frac{1}{2}(S - M)$ .

10. Чи буде число  $2009^2 + 2010^2 + 4038090^2$  повним квадратом?

## ЗАОЧНИЙ ТУР (ІНФОРМАТИКА)

До кожної запропонованої задачі слід надати алгоритм розв'язку та написати програму однією з мов програмування

**1. Палиця.** Петро має палицю завдовжки 64 сантиметри. Але йому потрібна палиця довжиною  $x$  сантиметри ( $x < 64$ ). Петро бажає спочатку розламати вихідну палицю на декілька частин, а потім склеїти з них палицю довжиною  $x$  сантиметрів. Для розв'язку задачі Петро бажає скористатися наступним алгоритмом:

1. Петро сумує довжини усіх частинок палиці (спочатку є одна частина довжиною 64 сантиметри). Поки ця сума більша за  $x$ , Петро робить наступні дії:

- Петро обирає частинку найменшої довжини та ламає її навпіл;
- Якщо після викидання однієї із половинок сума частин що залишилися не стане меншою за  $x$ , то викидаємо її. Інакше обидві половинки залишаються у Петра;

2. Петро склеює усі частинки палиці що є в нього.

Обчислити кількість частинок, яке Петро буде склеювати на другому кроці алгоритму.

**Вхід.** Бажана довжина палиці  $x$ .

**Вихід.** Кількість частинок, яку Петро буде склеювати на другому кроці алгоритму.

Приклад входу

номер тесту	$x$
1	32
2	48
3	23

Приклад виходу

1
2
4

**2. Формула.** Розглянемо формулу  $? 1 ? 2 ? \dots ? n = k$ . Замість знаків '?' слід поставити знаки '+' та '-' так, щоб отримати вірну рівність. Для заданого  $k$  зйти найменше  $n$ , для якого існує вказана формула.

Наприклад, для  $k = 12$  відповіддю буде  $n = 7$ , оскільки  $-1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 = 12$ .

**Вхід.** Ціле значення  $k$ .

**Вихід.** Найменше  $n$ , для якого існує вказана формула.

Приклад входу

номер тесту	$k$
1	12
2	-3646397

Приклад виходу

7
2701

**3. Швець.** Швець має виконати  $n$  робіт, пронумерованих з 1 до  $n$ . Для  $i$ -ої роботи відомий час її виконання  $T_i$  (днів) та штраф  $S_i$ , який кожен день має платити швець до тих пір, поки він не здасть  $i$ -у роботу замовнику. Знайти послідовність виконання робіт, при якій сума штрафу буде найменшою.

**Вхід.** Кількість робіт  $n$  та масиви  $t$  та  $s$ , що містять характеристики робіт – значення  $T_i$  та  $S_i$ .

**Вихід.** Порядок виконання робіт, при якій сума штрафу буде найменшою. Якщо варіантів відповіді декілька, вивести один із них.

**Приклад входу**

номер тесту	n	t	s
1	4	{3, 1, 2, 5}	{4, 1000, 2, 5}

**Приклад виходу**

2 1 3 4
---------

**4. Хмарочоси.** Лінія обр'ю в місті складається з  $n$  будинків, кожний з яких має унікальну висоту від 1 до  $n$ . Будинок видно з лівої (правої) сторони, якщо ліворуч (праворуч) від нього не існує будинку з більшою висотою. Наприклад, якщо будинки розташовані у порядку {1, 3, 5, 2, 4}, то з лівої сторони видно будинки з висотами 1, 3, 5, а з правої сторони 4 та 5. Відомо, що будинки розташовані таким чином, що з лівої сторони видно в точності *leftSide* будинків, а з правої сторони *rightSide* будинків. Знайти кількість перестановок будинків, для яких це можливо. Результат повернути за модулем 1000000007.

**Вхід.** Кількість будинків  $n$  та цілі значення *leftSide* та *rightSide*.

**Вихід.** Кількість перестановок з  $n$  будинків, для яких з лівої сторони видно в точності *leftSide* будинків, а з правої сторони *rightSide* будинків.

**Приклад входу**

номер тесту	n	leftSide	rightSide
1	3	2	2
2	5	3	2
3	8	3	2

**Приклад виходу**

2
18
4872

**5. Вечірка.** На вечірку запрошено  $n$  хлопців та  $n$  дівчат. Вони бажають танцювати декілька раундів. В кожному раунді запрошені діляться на  $n$  пар що танцюють. Кожний гість має обов'язково бути в деякій парі, кожна пара має складатися з одного хлопця та однієї дівчини. В кожному раунді кожен хлопчик має танцювати з іншою дівчиною та навпаки. Деякі хлопці та дівчата не подобаються один одному. Кожен хлопець може танцювати не більш ніж з  $k$  дівчатами, які йому не подобаються. Аналогічно кожна дівчина може танцювати не більш ніж з  $k$  хлопцями, які їй не подобаються.

Масив likes описує відношення між хлопцями та дівчатами:  $likes[i][j] = 'Y'$ , якщо  $i$ -ому хлопцю подобається  $j$ -та дівчина. Інакше  $likes[i][j] = 'N'$ . Відношення "подобається" є симетричним. Яку найбільшу кількість раундів зможуть танцювати хлопці та дівчата?

**Вхід.** Масив likes, який описує відношення між запрошеними та ціле число  $k$ .

**Вихід.** Найбільша кількість раундів, яку зможуть танцювати хлопці та дівчата.

**Приклад входу**

номер тесту	likes	k
1	{"YYY", "YYY", "YYY"}	0
2	{"YYY", "YYN", "YNY"}	0
3	{"YN", "YN"}	1

**Приклад виходу**

3
2
1