Завдання з математики
очного туру олімпіади факультету кібернетики

2002 рік

1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 + 3 \operatorname{ctg} x_1 = 2 \operatorname{tg} x_2, \\ \operatorname{tg} x_2 + 3 \operatorname{ctg} x_2 = 2 \operatorname{tg} x_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \operatorname{tg} x_{n-1} + 3 \operatorname{ctg} x_{n-1} = 2 \operatorname{tg} x_n, \\ \operatorname{tg} x_n + 3 \operatorname{ctg} x_n = 2 \operatorname{tg} x_1. \end{cases}$$

2. Кожну точку простору зафарбовано в один із чотирьох кольорів. Чи завжди знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1?

3. Натуральні числа x та y отримуються одне з одного перестановкою цифр. Перевірити твердження: "Суми цифр чисел $5x$ та $5y$ збігаються".

4. Площиною повзуть кілька (не менше трьох) черепах, швидкості яких постійні за величиною і напрямком, всі рівні за величиною, але попарно різні за напрямком. Перевірити твердження: "Незалежно від початкового розташування через деякий час всі черепахи будуть у вершинах деякого опуклого многокутника".

5. Знайти всі дійсні функції f, які визначено на множині дійсних чисел і такі, що для будь-яких x та y виконується рівність $f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$.