

Завдання з математики очного туру олімпіади факультету кібернетики

2006 рік

1. Позначимо через α_n кут з інтервалу $(0; \frac{\pi}{2})$, тангенс якого дорівнює n . Довести, що:

$$\sqrt{1+1^2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1000}) + \sqrt{1+2^2} \sin(\alpha_2 - \alpha_{1000}) + \dots + \sqrt{1+2000^2} \sin(\alpha_{2000} - \alpha_{1000}) = \sin \alpha_{1000}.$$

2. Розв'язати рівняння:

$$x^3 + px^2 + \left(p - 1 + \frac{1}{p-1}\right)x + 1 = 0,$$

де p — параметр.

3. Доведіть, що існують ірраціональні числа a та b такі, що число a^b — раціональне.
4. 75 політиків зібралися на диспут за круглим столом. Кожен із них або завжди бреше, або завжди каже правду. Відомо, що із двох сусідів кожного брехуна рівно один є брехуном. На пресконференції після диспуту 36 політиків сказали, що рівно один із їхніх сусідів є брехуном, а решта 39 політиків сказали, що обидва їхні сусіди — брехуни. Скільки правдивців та скільки брехунів зібралися на диспут?
5. В просторі довільним чином відмічено 316 точок. Доведіть, що серед них обов'язково знайдуться дві точки, відстань між якими більша, ніж 4, або дві точки, відстань між якими менша, ніж 1.
6. Яка мінімальна довжина рядка, що складається з символів 0 або 1, який в якості підрядка має входження будь-якого рядка довжини k . Підрядком називається довільна послідовність символів, що знаходяться поруч. Вкажіть алгоритм побудови такого рядка.