**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

О.М.Іксанов, В.І.Шевченко

Потоки на мережах
(курс “Дослідження операцій”)

Навчальний посібник

**Київ
2010**

УДК 519.8

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук С.І.Ляшко;
канд. фіз.-мат.наук С.О.Мащенко

Затверджено вченою радою факультету кібернетики
25 жовтня 2010 року

О.М. Іксанов, В.І. Шевченко
Потоки на мережах (курс "Дослідження операцій"): Навчальний посібник. – К.: Наукове видавництво "ТВіМС", 2010. – 46с**.**

Розглянуто питання як обгрунтування, так і практичного застосування методів відшукання оптимальних потоків на мережах, які є складовими курсів математичних методів дослідження операцій та методів оптимізації. Запропоновано приклади для самостійного розв'язування.

Матеріал, викладений у посібнику, відповідає програмі курсу дослідження операцій для спеціальностей "прикладна математика" та "інформатика".

1. Вступ.

Матеріал посібника може використовуватись як викладачем, так і студентом при опрацюванні тем, пов'язаних з вивченням оптимізаційних моделей на мережах.

У посібнику розглянуті питання як обгрунтування, так і практичного застосування методів відшукання оптимальних потоків на мережах, які є складовими курсів математичних методів дослідження операцій та методів оптимізації. Зокрема, обговорюються задача про оптимальний потік на мережі, задача про максимальний потік на мережі з обмеженими пропускними спроможностями дуг та метод Форда-Фалкерсона відшукання такого потоку, задача про найкоротший шлях на мережі та метод Мінті її розв’язування.

Теоретичні твердження та методи проілюстровані прикладами, пропонуються завдання для самостійного опрацювання та відповідні лабораторні роботи.

У додатку наведена програма відповідного розділу курсу “Дослідження операцій”.

2. Графи. Основні означення.

(Розділ викладений у відповідності з [2], с.27–31).

Говорять, що заданий граф $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{X},\Gamma)$*, якщо задана непорожня множина* $\boldsymbol{X}$ *, та відображення* Γ *множини* $\boldsymbol{X}$ *в* $\boldsymbol{X}$ *.*

Граф $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{X},\Gamma)$ *називають нуль-графом, якщо він складається з ізольованих елементів множини* $\boldsymbol{X}$ *, тобто для довільного* $x\in\Gamma$ $\Gamma x=\varnothing$.

Граф $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Gamma})$ *називають повним графом, якщо для довільного* $x\in\Gamma$ $\Gamma x=\boldsymbol{X}\setminus\{x\}$.

Прийнято називати елементи множини $\boldsymbol{X}$ вершинами (вузлами) графа $\boldsymbol{G}$, а пари $u=(x,y)$, такі, що $x\in\boldsymbol{X}$, $y\in\Gamma x$ – дугами графа. Множину всіх дуг будемо позначати через $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$. У дузі $u=(x,y)$ вершину x називають початком дуги, а вершину y – кінцем дуги. Говорять, що дуга (x,y) виходить із вершини x і заходить у вершину y . Дуга (x,x) називається петлею.

Якщо орієнтація дуги несуттєва, тобто існують відображення вершин x в y і y в x одночасно, то говорять, що вершини x та y зв’язані ребром $[x,y]$. Множину ребер будемо позначати через $\boldsymbol{U}$.

Графи, в яких відображення множини $\boldsymbol{X}$ *в* $\boldsymbol{X}$ *здійснюється тільки дугами, називаються орієнтованими і позначаються* $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{X},\overrightarrow{\boldsymbol{U}})$ *. Графи, в* *яких відображення множини* $\boldsymbol{X}$ *в* $\boldsymbol{X}$ *здійснюється лише за допомогою ребер, називаються неорієнтованими і позначаються* $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ *.*

Граф $\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{X}_1, \Gamma_1)$ *називається частинним графом графа* $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \Gamma)$*, якщо* $\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{X}$ *і для довільного* $x \in \boldsymbol{X}$ $\Gamma_1 x \subset \Gamma_2 x$*, тобто множина дуг або ребер графа* $\boldsymbol{G}_1$ *є підмножиною дуг або ребер графа* $\boldsymbol{G}$ *.*

Граф $\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{X}_1, \Gamma_1)$ *називається підграфом графа* $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \Gamma)$*, якщо* $\boldsymbol{X_1} \subset \boldsymbol{X}$ *і* $\Gamma_1 x = \Gamma x \bigcap \boldsymbol{X}_1$*, тобто дуга чи ребро графа* $\boldsymbol{G}$ *належить графу* $\boldsymbol{G_1}$*, якщо вершини, які вони сполучають, є елементами* $\boldsymbol{X_1}$ *.*

Дуги або ребра u і v суміжні, якщо вони різні і мають одну спільну вершину. Вершини x і y суміжні, якщо вони різні і сполучені дугою чи ребром.

Шляхом у графі $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \vec{\boldsymbol{U}})$ *називається впорядкована послідовність дуг* $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$ *вигляду*

$$S = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{n-1}, x_n)\} . \qquad (2.1)$$

Вершину x_1 *називають початком шляху* S*, вершину* x_n *– кінцем шляху* S *.*

Якщо в шляху S *початок і кінець збігаються, тобто* $x_1 = x_n$*, то такий шлях називається контуром. Контур називають елементарним, якщо, крім* x_1 *і* x_n*, у нього немає інших вершин, що збігаються.*

Поняттям шляху та контура у неорієнтованих графах відповідають поняття ланцюга та циклу.

Граф $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ *називають зв'язним, якщо кожні дві його вершини можна сполучити ланцюгом. Компонентою зв'язності графа* $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ *називається кожний його підграф, який поряд з будь-якою своєю вершиною* x *містить і всі інші вершини, з якими* x *може бути сполучена ланцюгом.*

Зв'язний граф складається з однієї компоненти зв'язності. Поняття зв'язності розповсюджується також і на орієнтовані графи $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \vec{\boldsymbol{U}})$, при цьому з дуг потрібно зняти орієнтацію, тобто замінити їх на ребра, та застосувати вищенаведені означення зв'язності для неорієнтованих графів.

Деревом називається зв'язний неорієнтований граф, що має не менше двох вершин і не містить циклів. У дереві кожні дві вершини сполучені єдиним ланцюгом.

Деревами часто називають і орієнтовані графи, якщо вони задовольняють означення дерева після заміни дуг на ребра.

Прадеревом з коренем у вершині x *називається зв'язний орієнтований граф, який не містить контурів і в якому у вершину* x *не заходить жодної дуги, а у кожну іншу вершину заходить тільки по одній дузі.*

3. Мережі, потоки. Означення і основні теореми.

Мережею називається граф, елементам якого поставлені у відповідність деякі параметри.

Під елементами графа розуміють його вершини, дуги (ребра) та більш складні конструкції, утворені з цих елементарних.

Нехай мережа визначається графом $(\boldsymbol{I}, \overrightarrow{\boldsymbol{U}})$. Поставимо у відповідність кожній його вершині $i \in \boldsymbol{I}$ число b_i, яке назвемо інтенсивністю вершини i, а кожній дузі $(i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ – число d_{ij}, що називається пропускною спроможністю дуги (i, j). Якщо $b_i > 0$, то вершину i будемо називати джерелом, якщо $b_i < 0$, то – стоком, якщо $b_i = 0$, то – нейтральною вершиною.

Величини b_i інтерпретуються як об'єми виробництва ($b_i > 0$) або об'єми споживання ($b_i < 0$) деякого однорідного продукту у реальному пункті, що відповідає вершині i мережі. Якщо $b_i = 0$, то вершині i відповідає транзитний пункт, через який продукт лише транспортується. Величини d_{ij} визначають обмеження пропускних спроможностей комунікацій, що відповідають дугам (i, j) мережі.

Говорять, що мережа допускає однорідний потік, якщо існують числа x_{ij}, $(i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ *(які називаються дуговими потоками), що задовольняють умови*

$$\sum_{\{j:(i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki} = b_i, \; i \in \boldsymbol{I}, \tag{3.1}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \; (i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}. \tag{3.2}$$

Множина всіх дугових потоків $\boldsymbol{X} = \{x_{ij} : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$ *називається допустимим потоком на мережі.*

Означення (розрізу мережі, що породжується підмножиною її вершин). *Розрізом мережі, породженим підмножиною вершин* $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{I}$, *називається множина дуг мережі вигляду*

$$\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V}) = \{(i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}} : i \in \boldsymbol{V},\ j \in \boldsymbol{I} \setminus \boldsymbol{V}\} .$$

Величина

$$d(\boldsymbol{V}) = \sum_{(i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V})} d_{ij}$$

називається пропускною спроможністю розрізу $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V})$.

Теорема (критерій існування потоку на мережі). *Мережа* $(\boldsymbol{I}, \vec{\boldsymbol{U}})$ *допускає потік тоді і тільки тоді, коли:*

1) сумарна інтенсивність всіх її вершин рівна нулю

$$b(\boldsymbol{I}) = \sum_{i \in \boldsymbol{I}} b_i = 0\ ; \tag{3.3}$$

2) сумарна інтенсивність будь-якої підмножини вершин $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{I}$ *не перевищує пропускної спроможності* $d(\boldsymbol{V})$ *розрізу мережі* $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V})$, *породженого цією підмножиною*

$$b(\boldsymbol{V}) = \sum_{i \in \boldsymbol{V}} b_i \le d(\boldsymbol{V})\ . \tag{3.4}$$

(Див. доведення [1], с.10, с14, с15).

Визначимо на множині $\vec{\boldsymbol{U}}$ функцію вартостей $\boldsymbol{C} = \{c_{ij} : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$ і кожному потоку $\boldsymbol{X} = \{x_{ij} : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$ поставимо у відповідність значення лінійної функції

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{(i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}} c_{ij} x_{ij}\ . \tag{3.5}$$

Задача відшукання потоку $\boldsymbol{X}$, що мінімізує функцію (3.5) і задовольняє умови (3.1), (3.2), називається задачею про оптимальний потік на мережі або лінійною мережевою задачею.

Слід зауважити, що ця задача є окремим випадком задачі лінійного програмування і тому може розв’язуватись загальними методами лінійного програмування. Але, звичайно, специфіка цієї задачі може суттєвим чином використовуватись при розробці специфічних, більш ефективних методів її розв'язування. Нижче розглядаються два окремі випадки задачі про оптимальний потік на мережі разом з відповідними методами розв'язування.

4. Задача про найкоротший шлях на мережі.

4.1. Постановка задачі про найкоротший шлях на мережі.

Нехай граф $(\boldsymbol{I},\vec{\boldsymbol{U}})$ визначає мережу із заданою на множині $\vec{\boldsymbol{U}}$ функцією вартостей $\boldsymbol{C}=\{c_{ij}:(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}$. Розглянемо на мережі довільний шлях $l_{i_1 i_s}$ із фіксованої вершини i_1 у фіксовану вершину i_s

$$l_{i_1 i_s}=\{(i_1,i_2),(i_2,i_3),...,(i_{s-1},i_s)\}=\{i_1,i_2,...,i_s\},\ i_m\in\boldsymbol{I},\ m=\overline{1,s}. \quad (4.1)$$

Введемо функцію вартості цього шляху

$$c(l_{i_1 i_s})=c_{i_1 i_2}+c_{i_2 i_3}+...+c_{i_{s-1} i_s}. \quad (4.2)$$

Цю функцію можна інтерпретувати або як вартість перевезення одиниці однорідного продукту по шляху $l_{i_1 i_s}$, або як довжину шляху $l_{i_1 i_s}$. В останньому випадку c_{ij} є довжиною дуги (i,j).

Задача про найкоротший шлях із вершини i_1 у вершину i_s полягає у пошуку такого шляху $l^*_{i_1 i_s}$, для якого

$$c(l^*_{i_1 i_s})=\min_{l_{i_1 i_s}} c(l_{i_1 i_s}), \quad (4.3)$$

де мінімум в (4.3) знаходять по всіх можливих шляхах $l_{i_1 i_s}$ із вершини i_1 у вершину i_s.

З формальної точки зору ця задача є окремим випадком задачі про оптимальний потік на мережі. Дійсно, нехай c_{ij} – довжина дуги $(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}$, x_{ij} – потік по дузі $(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}$, $d_{ij}=\infty$ (тобто пропускна спроможність дуги $(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}$ необмежена). Вершину i_1 будемо вважати джерелом одиничної інтенсивності ($b_{i_1}=1$), а вершину i_s – стоком одиничної інтенсивності ($b_{i_s}=-1$), всі інші вершини вважаємо нейтральними ($b_i=0, i\in\boldsymbol{I}, i\neq i_1, i\neq i_s$). Тоді задачу про найкоротший шлях із вершини i_1 у вершину i_s на такій мережі можна сформулювати так: знайти потік $\boldsymbol{X} = \{x_{ij} : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$, що мінімізує функцію

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{4.4}$$

за умов

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i_1,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}} x_{i_1 j} = 1, \\ \sum\limits_{\{j:(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij} - \sum\limits_{\{k:(k,i)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki} = b_i,\ i \in \boldsymbol{I}, i \neq i_1, i \neq i_s, , \\ -\sum\limits_{(k,i_s)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki_s} = -1, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}. \tag{4.6}$$

Зазначимо, що сформульована задача має реальний зміст лише за виконання для оптимального потоку $\boldsymbol{X}^* = \{x_{ij}^* : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$ обмежень такого вигляду

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1, & (i,j) \in l_{i_1 i_s}^*, \\ 0, & (i,j) \notin l_{i_1 i_s}^*. \end{cases} \tag{4.7}$$

Незважаючи на те, що умови $x_{ij} \in \{0,1\}$ не відображені в задачі (4.4) – (4.6) у явному вигляді, її спеціальна структура завжди приводить до оптимального розв'язку, який задовольняє ці умови, оскільки ***задача має властивість абсолютної унімодулярності***, згідно з якою розв'язок такої задачі завжди задовольняє умови $x_{ij} \in \{0,1\}$ (див. [4], ст.264).

4.2. Метод Мінті розв'язування задачі про найкоротший шлях на мережі.

Для розв'язування задачі про найкоротший шлях на мережі існує декілька методів. Розглянемо один з найпростіших і, в той же час, один з найбільш ефективних методів її розв'язування – метод Мінті. Метод дозволяє знаходити найкоротші шляхи із деякої фіксованої вершини у всі інші вершини мережі, якщо, звичайно, такі шляхи існують. Тобто метод Мінті будує прадерево найкоротших шляхів із заданим коренем у всі досяжні вершини мережі.

4.2.1. Алгоритм методу Мінті.

Алгоритм Мінті складається із скінченного числа однотипних кроків, на кожному з яких виділяються дуги, що належать прадереву найкоротших шляхів, та кінці цих дуг позначаються числами, що є довжинами найкоротших шляхів з кореня прадерева в кінці виділених дуг. Нульовий крок відрізняється від інших: на ньому позначається корінь прадерева найкоротших шляхів. Нехай i_1 – довільна фіксована вершина, $\boldsymbol{P}^{(r)}$ – множина вершин, позначених на кроці r, $\boldsymbol{I}^{(r)}$ – множина вершин, позначених за нульовий та r пересічних кроків.

Крок 0. Корінь дерева (вершину i_1) позначити сталою $h_{i_1} = 0$. Після нульового кроку $\boldsymbol{I}^{(0)} = \boldsymbol{P}^{(0)} = \{i_1(h_{i_1})\} = \{i_1(0)\}$.

Нехай, крім нульового, здійснено r кроків алгоритму, за які побудована множина $\boldsymbol{I}^{(r)} = \{i_1(h_{i_1}),...,i_k(h_{i_k}),...\}$ позначених вершин $i_k(h_{i_k})$, кожній з яких поставлене у відповідність число h_{i_k}, що дорівнює довжині найкоротшого шляху із вершини i_1 у вершину i_k. Перейти до $\boldsymbol{(r+1)}$ – го кроку.

Крок $\boldsymbol{(r+1)}$. 1. Побудувати розріз мережі, породжений множиною позначених вершин

$$\vec{\boldsymbol{U}}(I^{(r)}) = \{(i, j) \in \vec{\boldsymbol{U}} : i \in I^{(r)},\ j \in \boldsymbol{I} \setminus I^{(r)}\} .$$

2. Перевірити умову $\vec{\boldsymbol{U}}(I^{(r)}) = \varnothing$. Якщо умова виконується, то кінець обчислень, прадерево найкоротших шляхів з коренем у вершині i_1 побудоване. Його утворюють всі виділені дуги мережі. В іншому випадку, перейти до наступного пункту.

3. Для кожної дуги (i, j) розрізу $\vec{\boldsymbol{U}}(I^{(r)})$ обчислити довжину шляху з кореня i_1 в кінець цієї дуги $h_i + c_{ij}$ та знайти

$$\theta = \min_{(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{I}^{(r)})} (h_i + c_{ij}) .$$

Перейти до наступного пункту.

4. Виділити всі дуги розрізу $\vec{\boldsymbol{U}}(I^{(r)})$, на яких досягається θ. Якщо кілька таких дуг заходять у одну і ту саму вершину, то виділяється довільна з них, але тільки одна. Перейти до наступного пункту.

5. Кінці виділених дуг позначити числами θ, та об'єднати ці вершини у множину $\boldsymbol{P}^{(r+1)}$. Перейти до наступного пункту.
6. Утворити множину $\boldsymbol{I}^{(r+1)}$, приєднавши множину $\boldsymbol{P}^{(r+1)}$ до множини $\boldsymbol{I}^{(r)}$:

$$\boldsymbol{I}^{(r+1)} = \boldsymbol{I}^{(r)} \cup \boldsymbol{P}^{(r+1)}.$$

Перейти до $(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{2})$ – го кроку.
Кінець алгоритму**.**

4.2.2. Теорема про оптимальність шляху, побудованого методом Мінті.

За побудовою множини виділених дуг в кожну з позначених вершин (окрім i_1) заходить єдина виділена дуга. Початок кожної виділеної дуги позначається раніше її кінця. Тому рух від довільної позначеної вершини i_s по виділених дугах у напрямку протилежному їх орієнтації здійснюється однозначно, і послідовність таких виділених дуг складає деякий шлях $l^*_{i_1 i_s}$ з вершини i_1 у вершину i_s.

Теорема (про оптимальність шляху $l^*_{i_1 i_s}$). *Для довільної позначеної вершини $i_s \in \boldsymbol{I}^*$, де $\boldsymbol{I}^*$ – множина позначених вершин, побудована методом Мінті, шлях $l^*_{i_1 i_s}$ є найкоротшим. При цьому довжина шляху $l^*_{i_1 i_s}$ дорівнює $c(l^*_{i_1 i_s}) = h_{i_s}$ позначці вершини i_s.*

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції за номером кроку t алгоритму Мінті, на якому позначена вершина i_s.

а) Нехай $t=0$, тобто вершина i_s позначена на нульовому кроці ($i_s \in \boldsymbol{P}^{(0)} = \boldsymbol{I}^{(0)}$). Тоді

$$i_s = i_1,\ h_{i_s} = h_{i_1} = 0,\ c(l^*_{i_1 i_s}) = 0 \ \Rightarrow c(l^*_{i_1 i_s}) = h_{i_s} = 0.$$

Теорема виконується для $i_s \in \boldsymbol{I}^{(0)}$.

b) Нехай $t=1$, тобто i_s позначена на першому кроці ($i_s \in \boldsymbol{P}^{(1)} \subset \boldsymbol{I}^{(1)}$, $\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{I}^{(0)} \cup \boldsymbol{P}^{(1)}$). Тоді для позначки вершини i_s маємо

$$h_{i_s} = \theta = \min_{(i,j)\in \vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{I}^{(r)})} (h_i + c_{ij}) = \min_{(i_1,j)\in \vec{\boldsymbol{U}}} c_{i_1 j} = c_{i_1 i_s},$$

оскільки дуга (i_1, i_s) виділена, тобто найкоротший шлях із вершини i_1 у вершину i_s є $l^*_{i_1 i_s} = \{(i_1, i_s)\}$.

З іншого боку, довжина найкоротшого шляху із вершини i_1 у вершину i_s дорівнює $\min\limits_{(i_1,j)\in\vec{U}} c_{i_1 j} = c_{i_1 i_s}$. Тому $c(l^*_{i_1 i_s}) = h_{i_s} = c_{i_1 i_s}$. Теорема виконується для всіх $i_s \in \boldsymbol{I}^{(1)}$.

с) Припустимо, що теорема справедлива при $t = r$. Це означає, що для довільної вершини $i_k \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ шлях $l^*_{i_1 i_k}$ найкоротший, і його довжина дорівнює h_{i_k} . Нехай вершина i_s позначена на $(r+1)$ – му кроці: $i_s \in \boldsymbol{P}^{(r+1)}$. Покажемо, що шлях $l^*_{i_1 i_s}$, побудований методом Мінті , найкоротший з можливих. Подамо його у вигляді $l^*_{i_1 i_s} = \{l^*_{i_1 i_k}, (i_k, i_s)\}$, де $i_k \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ – позначена вершина, з якої виходить *виділена на* $(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})$ – *му кроці дуга* $(\boldsymbol{i_k}, \boldsymbol{i_s})$ *, що заходить у вершину* $\boldsymbol{i_s}$. Оскільки $\forall i_k \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ шлях $l^*_{i_1 i_k}$ найкоротший і його довжина дорівнює h_{i_k} ,

то

$$c(l^*_{i_1 i_s}) = c(l^*_{i_1 i_k}) + c_{i_k i_s} = h_{i_k} + c_{i_k i_s} . \qquad (4.8)$$

І так як дуга (i_k, i_s) виділена, то шлях $l^*_{i_1 i_s} = \{l^*_{i_1 i_k}, (i_k, i_s)\}$ найкоротший з можливих і довжина його дорівнює $h_{i_k} + c_{i_k i_s}$. З іншого боку, за алгоритмом Мінті для позначки вершини $i_s \in \boldsymbol{P}^{(r+1)}$ маємо

$$h_{i_s} = \theta = \min_{(i,j)\in\vec{U}(\boldsymbol{I}^{(r)})} (h_i + c_{ij}) = h_{i_k} + c_{i_k i_s} , \qquad (4.9)$$

оскільки (i_k, i_s) – виділена на $(r+1)$ – му кроці дуга.

Отже, теорема справедлива і при $t = r+1$, тобто для довільної вершини $i_s \in \boldsymbol{I}^{(r+1)} = \boldsymbol{P}^{(r+1)} \cup \boldsymbol{I}^{(r)}$ шлях $l^*_{i_1 i_s}$ найкоротший, і його довжина дорівнює h_{i_s} . Тому теорема справедлива для всіх натуральних t .

Зауваження. Якщо деяка вершина i_s мережі залишилась непозначеною після закінчення процедури Мінті, то шляху із кореня i_1 в i_s не існує. Дійсно, нехай $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{I}^{(r)}) = \varnothing$, і $i_s \notin \boldsymbol{I}^{(r)}$. Від супротивного, припустимо, що на мережі існує шлях $l_{i_1 i_s}$. Тоді існує дуга , яка належить цьому шляху і початок якої позначений (оскільки $i_1 \in \boldsymbol{I}^{(r)}$), а кінець непозначений (оскільки $i_s \notin \boldsymbol{I}^{(r)}$). Тому розріз мережі $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{I}^{(r)})$, породжений множиною $\boldsymbol{I}^{(r)}$ позначених вершин, буде непорожнім, що суперечить умові випадку. Отже, припущення невірне, і за умов зауваження шляху $l_{i_1 i_s}$ не існує.

4.2.3. Приклад.

Побудувати методом Мінті дерево найкоротших шляхів з коренем у вершині 1 на мережі (див. рис.1)

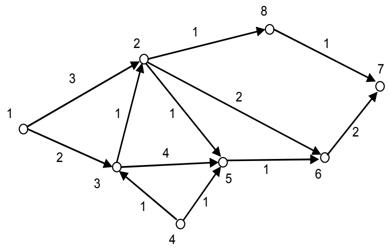


Рис.1

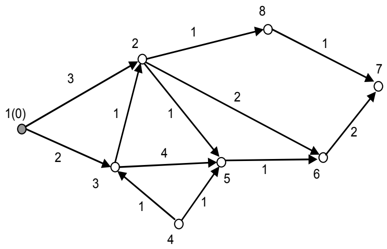


Рис.2

Розв'язування. Крок 0. Корінь дерева (вершину 1) позначимо сталою $h_1 = 0$. Після нульового кроку $\boldsymbol{I}^{(0)} = \boldsymbol{P}^{(0)} = \{1(0)\}$ (див. рис.2).

Крок 1. Будуємо розріз мережі $\vec{\boldsymbol{U}}(I^{(0)}) = \{(1,2),(1,3)\}$, породжений множиною позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(0)}$. Обчислюємо на дугах розрізу

$$\theta = \min(\underset{(1,2)}{h_1 + c_{12}}, \underset{(1,3)}{h_1 + c_{13}}) = \min(\underset{(1,2)}{0+3}, \underset{\boldsymbol{(1,3)}}{0+2}) = 2 .$$

θ досягається на дузі $(1,3)$, тому її виділяємо і позначаємо її кінець (вершину 3) позначкою $h_3 = \theta = 2$ (див. рис.3).

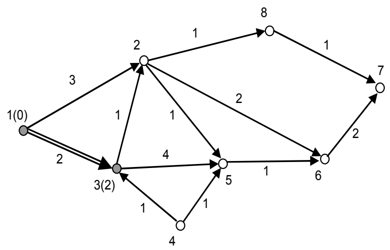


Рис.3

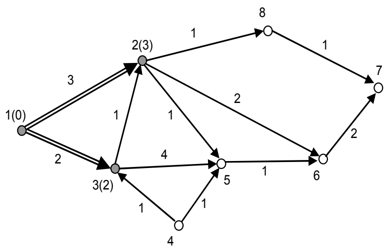


Рис.4

Утворюємо множину $\boldsymbol{I}^{(1)}$ позначених вершин за нульовий і перший кроки

$$\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{I}^{(0)} \cup \boldsymbol{P}^{(1)} = \{1(0)\} \cup \{3(2)\} = \{1(0), 3(2)\}$$

і переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Будуємо розріз мережі $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}(I^{(1)}) = \{(1,2),(3,2),(3,5)\}$, породжений множиною позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(1)}$. Обчислюємо на дугах розрізу

$$\theta = \min(\underset{(1,2)}{h_1 + c_{12}}, \underset{(3,2)}{h_3 + c_{32}}, \underset{(3,5)}{h_3 + c_{35}}) = \min(\underset{\boldsymbol{(1,2)}}{0+3}, \underset{\boldsymbol{(3,2)}}{2+1}, \underset{(3,5)}{2+4}) = 3 .$$

θ досягається на двох дугах – $(1,2)$ і $(3,2)$, які заходять у одну і ту саму вершину 2. Тому виділяємо тільки одну дугу, не важливо яку, наприклад, $(1,2)$, і позначаємо її кінець – вершину 2 – позначкою $h_2 = \theta = 3$ (див. рис.4).

Утворюємо множину позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(2)}$

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \cup \boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \cup \{2(3)\} = \{1(0), 3(2), 2(3)\}$$

і переходимо до наступного кроку.

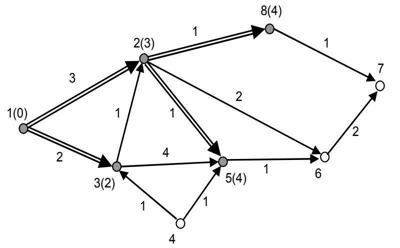


Рис.5

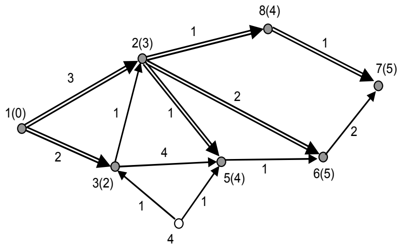


Рис.6

Крок 3. Будуємо розріз мережі $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}(I^{(2)}) = \{(2,5),(2,6),(2,8),(3,5)\}$, породжений множиною позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(2)}$. Обчислюємо на дугах розрізу

$$\theta = \min(\underset{(2,5)}{h_2 + c_{25}}, \underset{(2,6)}{h_2 + c_{26}}, \underset{(2,8)}{h_2 + c_{28}}, \underset{(3,5)}{h_3 + c_{35}}) = \min(\underset{\boldsymbol{(2,5)}}{3+1}, \underset{(2,6)}{3+2}, \underset{\boldsymbol{(2,8)}}{3+1}, \underset{(3,5)}{2+4}) = 4 .$$

θ досягається на двох дугах – $(2,5)$ і $(2,8)$, які заходять у різні вершини, тому виділяємо обидві дуги і позначаємо їх кінці – вершини 5 і 8 – позначками, відповідно, $h_5 = \theta = 4$ і $h_8 = \theta = 4$ (див. рис.5).

Утворюємо множину позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(3)}$

$$\boldsymbol{I}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \cup \boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \cup \{5(4), 8(4)\} = \{1(0), 3(2), 2(3), 5(4), 8(4)\}$$

і переходимо до наступного кроку.

Крок 4. Будуємо розріз мережі $\vec{U}(I^{(3)}) = \{(2,6),(5,6),(8,7)\}$, породжений множиною позначених вершин $I^{(3)}$. Обчислюємо на дугах розрізу

$$\theta = \min(\underset{(2,6)}{h_2 + c_{26}}, \underset{(5,6)}{h_5 + c_{56}}, \underset{(8,7)}{h_8 + c_{87}}) = \min(\underset{(2,6)}{3+2}, \underset{(5,6)}{4+1}, \underset{(8,7)}{4+1}) = 5 .$$

θ досягається на трьох дугах дугах – $(2,6)$, $(5,6)$ і $(8,7)$, дві з яких – $(2,6)$, $(5,6)$ заходять заходять у одну і ту саму вершину 6. Тому підлягає виділенню тільки одна з них, не важливо яка, наприклад – $(2,6)$. Оскільки дуги $(2,6)$ і $(8,7)$ заходять у різні вершини, то виділяємо обидві дуги і позначаємо їх кінці (вершини 6 і 7) позначками, відповідно, $h_6 = \theta = 5$ і $h_7 = \theta = 5$ (див. рис.6).

Утворюємо множину позначених вершин $I^{(4)}$

$$I^{(4)} = I^{(3)} \cup P^{(4)} = I^{(3)} \cup \{6(5),7(5)\} = \{1(0),3(2),2(3),5(4),8(4),6(5),7(5)\}$$

і переходимо до наступного кроку.

Крок 5. Розріз мережі, породжений множиною позначених вершин $I^{(4)}$, порожній $\vec{U}(I^{(4)}) = \varnothing$. Тому дерево найкоротших шляхів з коренем у вершині 1 побудоване. Його утворює множина виділених дуг

$$T = \{(1,3),(1,2),(2,5),(2,8),(2,6),(8,7)\} .$$

Множина I^* вершин мережі, досяжних з вершини 1, збігається з множиною $I^{(4)}$

$$I^* = I^{(4)} = \{1(0),3(2),2(3),5(4),8(4),6(5),7(5)\} .$$

Вершина 4 не позначена, тому шляху до неї з вершини 1 не існує.

Найкоротший шлях у довільну позначену вершину $i \in I^*$ з вершини 1 знаходять, починаючи з його кінця, рухаючись по виділених дугах у напрямку протилежному їх орієнтації. Наприклад, знайдемо найкоротший шлях у вершину 7. Вибираємо з множини T потрібні дуги:

у вершину 7 заходить виділена дуга $(8,7)$,

у вершину 8 заходить виділена дуга $(2,8)$,

у вершину 2 заходить виділена дуга $(1,2)$.

Отже, найкоротшим шляхом з вершини 1 у вершину 7 є шлях

$$l_{17}^* = \{(1,2),(2,8),(8,7)\} .$$

Довжина шляху l_{17}^* дорівнює позначці вершини 7

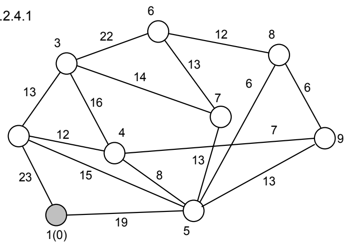
$$c(l_{17}^*) = h_7 = 5 .$$

4.2.4. Завдання для самостійного розв’язування.

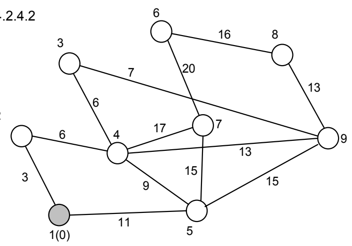
Побудувати на даних мережах дерева найкоротших шляхів із вершини 1 у всі досяжні з неї вершини.

Вказівка: при розв’язуванні задач ребра мережі замінити парою протилежно спрямованих дуг однакової довжини, що дорівнює довжині відповідного ребра.

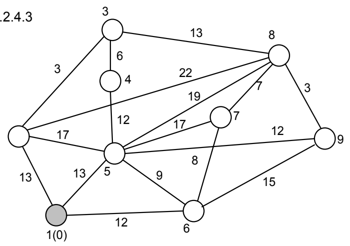
4.2.4.1



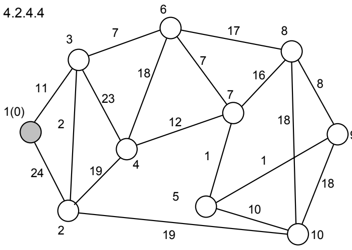
4.2.4.2



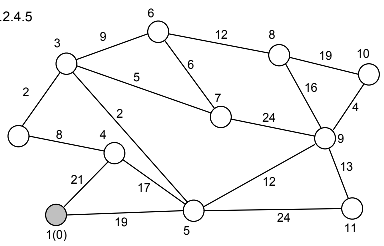
4.2.4.3



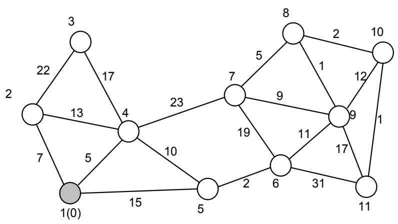
4.2.4.4



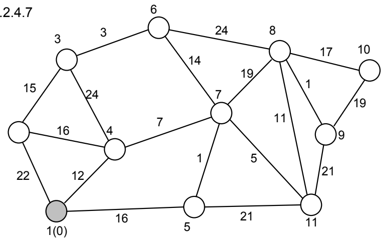
4.2.4.5



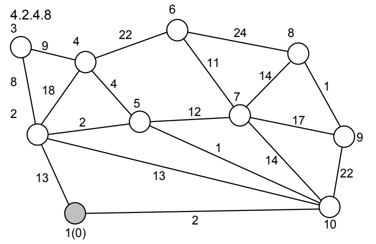
4.2.4.6



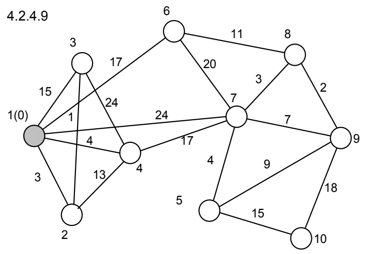
4.2.4.7



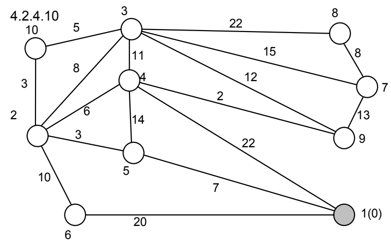
4.2.4.8



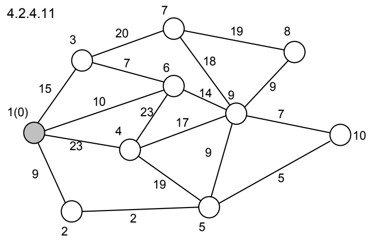
4.2.4.9



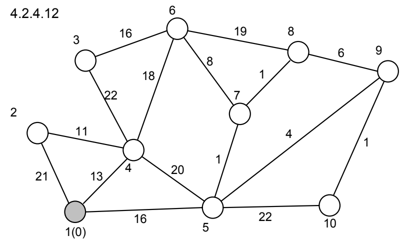
4.2.4.10



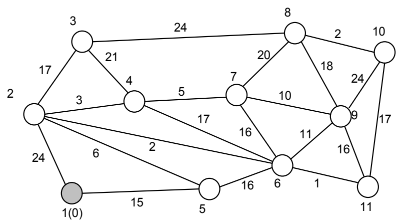
4.2.4.11



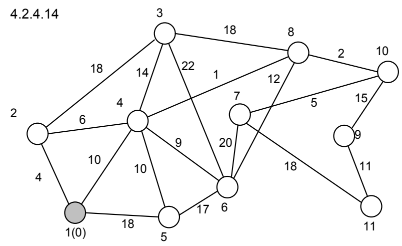
4.2.4.12



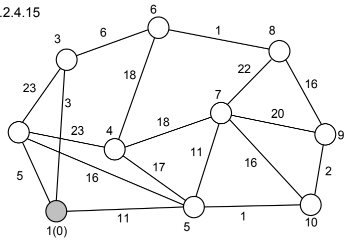
4.2.4.13



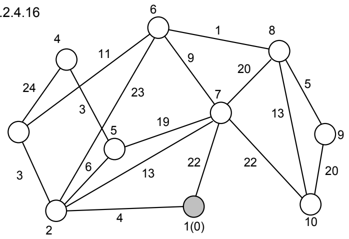
4.2.4.14



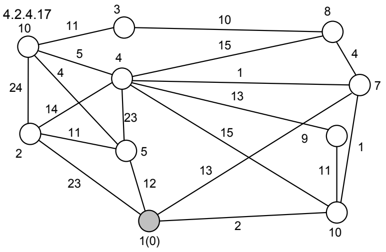
4.2.4.15



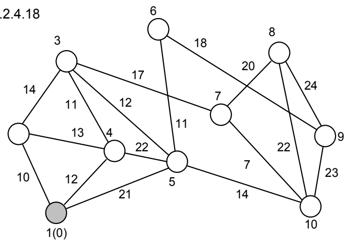
4.2.4.16



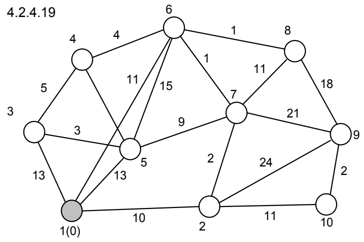
4.2.4.17



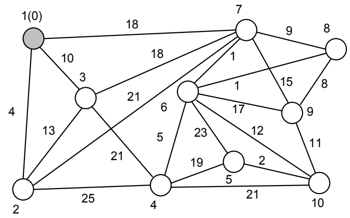
4.2.4.18



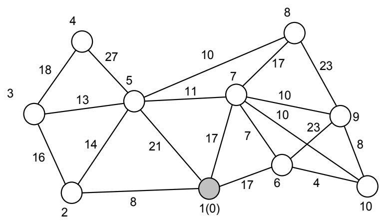
4.2.4.19



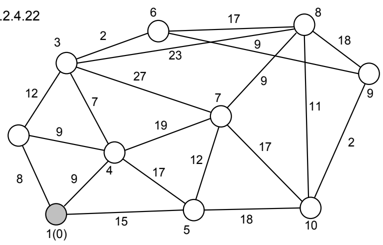
4.2.4.20



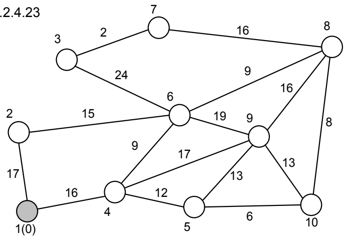
4.2.4.21



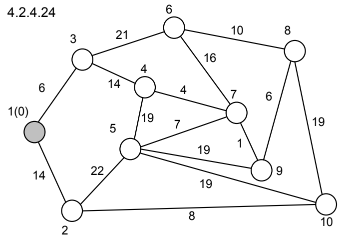
4.2.4.22



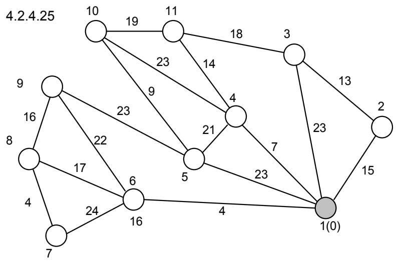
4.2.4.23



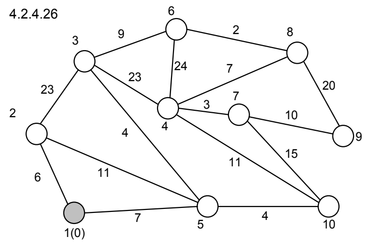
4.2.4.24



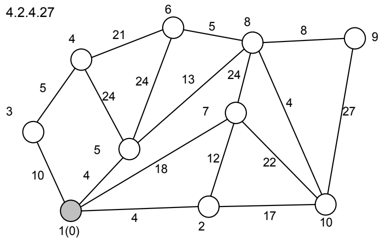
4.2.4.25



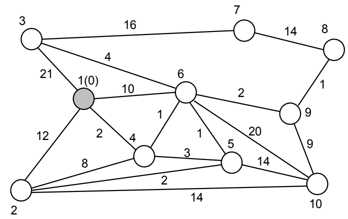
4.2.4.26



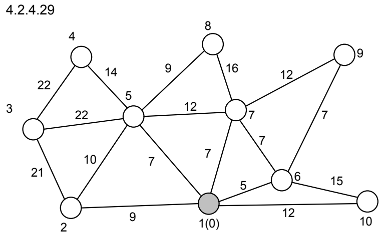
4.2.4.27



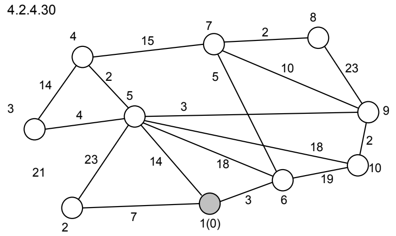
4.2.4.28



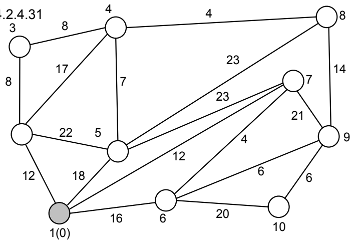
4.2.4.29



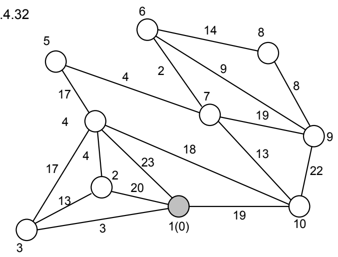
4.2.4.30



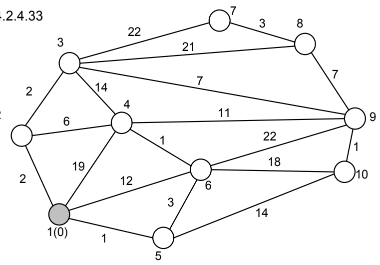
4.2.4.31



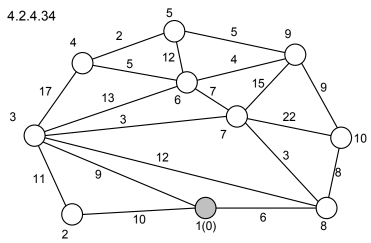
4.2.4.32



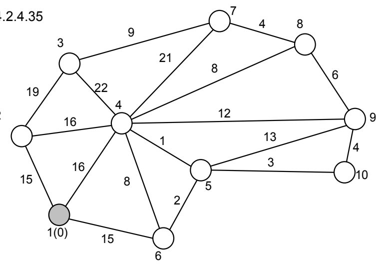
4.2.4.33



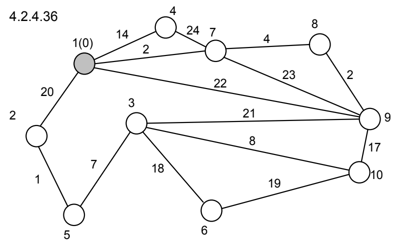
4.2.4.34



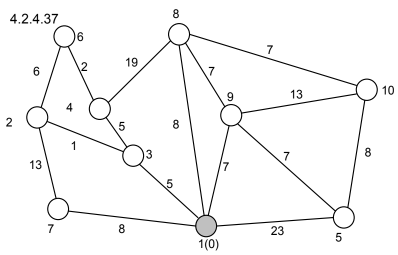
4.2.4.35



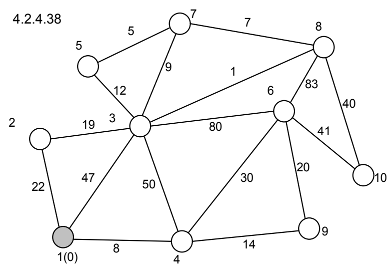
4.2.4.36



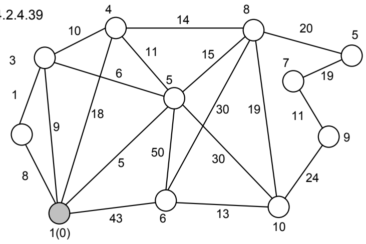
4.2.4.37



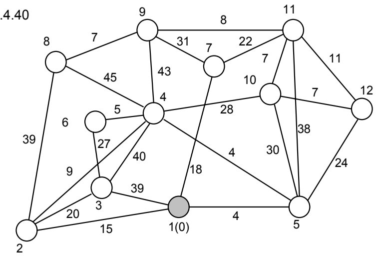
4.2.4.38



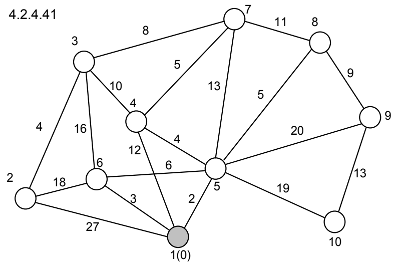
4.2.4.39



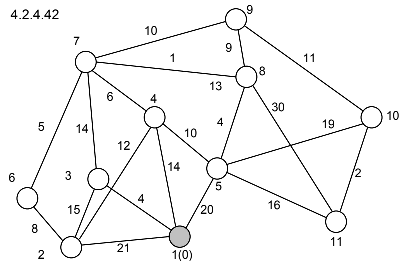
4.2.4.40



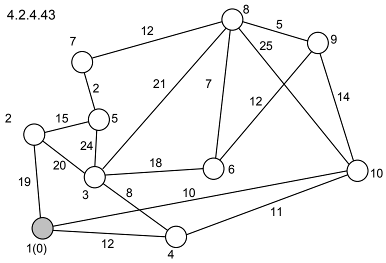
4.2.4.41



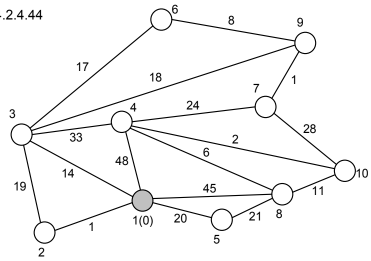
4.2.4.42



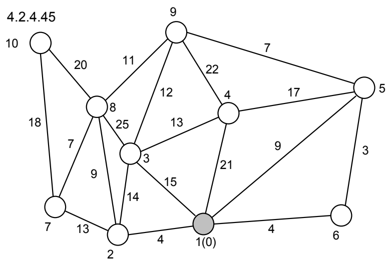
4.2.4.43



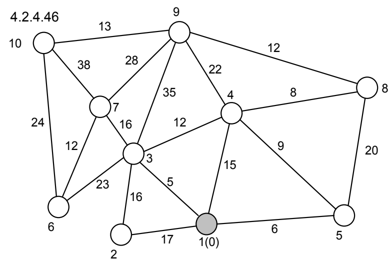
4.2.4.44



4.2.4.45



4.2.4.46



5. Задача про максимальний потік на мережі.

5.1. Постановка задачі про максимальний потік на мережі.

Нехай мережа, яка визначається графом $(\boldsymbol{I}, \vec{\boldsymbol{U}})$ і на множині дуг якої задані пропускні спроможності d_{ij} $((i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}})$, має єдине джерело s з інтенсивністю b і єдиний стік t. Тоді за критерієм існування допустимого потоку стік t повинен мати інтенсивність, що дорівнює $-b$, а сам допустимий потік на такій мережі визначатиметься умовами

$$\begin{cases} \sum\limits_{\{j:(s,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{sj} = b, \\ \sum\limits_{\{j:(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij} - \sum\limits_{\{k:(k,i)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki} = 0,\ i \in \boldsymbol{I},\ i \ne s,\ i \ne t, \\ -\sum\limits_{\{k:(k,t)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{kt} = -b, \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\ . \qquad (5.2)$$

Будемо вважати інтенсивність b джерела s змінною величиною. *Задачу про максимальний потік на мережі з єдиним джерелом і єдиним стоком можна сформулювати так: максимізувати b*

$$b \to \max \qquad (5.3)$$

за виконання умов (5.1), (5.2). Змістовно це означає відшукати найбільше значення інтенсивності b джерела s, при якому мережа допускає потік.

Позначимо це максимальне значення інтенсивності через b^*. Потік $\boldsymbol{X}^* = \{x_{ij}^* : (i,j) \in \vec{\boldsymbol{U}}\}$, що відповідає максимальному значенню інтенсивності b^* джерела s, називають максимальним потоком на мережі із єдиного джерела s у єдиний стік t, а саме значення b^* – величиною максимального потоку.

Задача про максимальний потік на мережі, подібно задачі про найкоротший шлях на мережі, є окремим випадком задачі про оптимальний потік на мережі. Дійсно, додамо почленно першу і останню рівності у (5.1) (тобто виключимо b) і приймемо за цільову функцію задачі ліву частину першої рівності. Отримаємо таку задачу, яка формально є задачею про оптимальний потік на мережі,

$$L = b = \sum_{\{j:(s,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{sj} \to \max\,, \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\{j:(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij} - \sum\limits_{\{k:(k,i)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki} = 0,\ i\in\boldsymbol{I},\ i\neq s,\ i\neq t, \\ \sum\limits_{\{j:(s,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{sj} - \sum\limits_{\{k:(k,t)\in\vec{\boldsymbol{U}}\}} x_{kt} = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ (i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}\,. \tag{5.6}$$

Говорять, що розріз мережі

$$\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}) = \{(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}} :\ i\in\boldsymbol{C},\ \ j\in\boldsymbol{I}\setminus\boldsymbol{C}\}\,,$$

породжений підмножиною вершин $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{I}$, відділяє джерело s від стоку t, якщо $s\in\boldsymbol{C},\ t\notin\boldsymbol{C}$.

Розріз мережі, який відділяє джерело s від стоку t і який має найменшу пропускну спроможність

$$d(\boldsymbol{C}) = \sum_{(i,j)\in\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C})} d_{ij}$$

серед всіх таких розрізів називають мінімальним розрізом мережі. Задачу відшукання мінімального розрізу мережі називають задачею про мінімальний розріз мережі.

Для прикладу наведемо кілька розрізів даної мережі (числа на її дугах вказують їх пропускні спроможності) , які відділяють джерело s від стоку t.

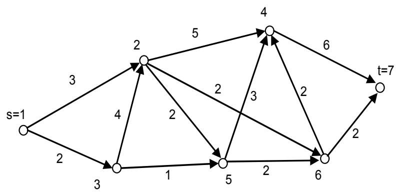


Рис.7

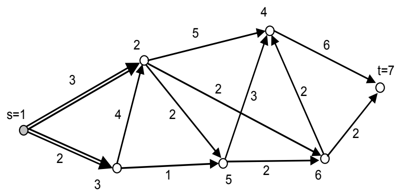


Рис.8

Такими розрізами, зокрема, будуть:

а) $\boldsymbol{C} = \{1\},\ \vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}) = \{(1,2),(1,3)\}$ (див. рис.8);

б) $\boldsymbol{C} = \{1,2\}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}) = \{(1,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$ (див. рис.9);

в) $\boldsymbol{C} = \{1,3,4\}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}) = \{(1,2),(3,2),(3,5),(4,7)\}$ (див. рис.10);

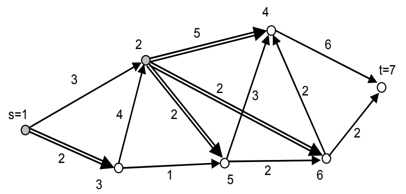


Рис.9

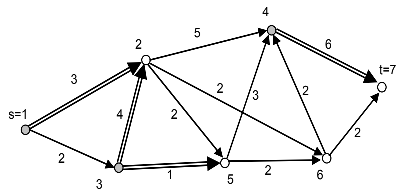


Рис.10

Задача про максимальний потік на мережі та задача про мінімальний розріз мережі пов'язані між собою. Зв'язок між ними встановлює теорема Форда-Фалкерсона.

5.2. Теорема Форда-Фалкерсона.

Теорема. *Нехай мережа з єдиним джерелом s і єдиним стоком t допускає потік. Тоді величина максимального потоку із джерела s у стік t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу мережі, який відділяє джерело s від стоку t.*

Доведення. Оскільки за умовою теореми мережа допускає потік, то існує і максимальний потік із джерела s у стік t скінченної чи нескінченної величини. Позначимо його та його величину, відповідно, через $\boldsymbol{X}^* = \{x_{ij}^* : (i,j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}$ та b^*. На основі потоку $\boldsymbol{X}^*$ визначимо підмножину $\boldsymbol{C}^* \subset \boldsymbol{I}$ вершин мережі за правилом:

1) $s \in \boldsymbol{C}^*$; (5.7)

2) якщо $i \in \boldsymbol{C}^*$, $\exists (i,j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ і $x_{ij}^* < d_{ij}$, то $j \in \boldsymbol{C}^*$; (5.8)

3) якщо $i \in \boldsymbol{C}^*$, $\exists (k,i) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ і $x_{ki}^* > 0$, то $k \in \boldsymbol{C}^*$. (5.9)

Доведемо, що визначена таким правилом підмножина вершин $\boldsymbol{C}^* \subset \boldsymbol{I}$ породжує мінімальний розріз мережі, який відділяє джерело s від стоку t. Спочатку покажемо, що $t \notin \boldsymbol{C}^*$. Від супротивного, припустимо, що $t \in \boldsymbol{C}^*$. Тоді із існування максимального потоку на мережі випливає існування ланцюга $\boldsymbol{l}$, що сполучає джерело $s \in \boldsymbol{C}^*$ зі стоком $t \in \boldsymbol{C}^*$. Позначимо його за допомогою вершин, через які він проходить

$$\boldsymbol{l} = [s = i_1, i_2, ..., i_m = t].$$

Для ланок $[i_s, i_{s+1}],\ s = \overline{1, m-1}$, ланцюга $\boldsymbol{l}$ маємо:

а) якщо ланці $[i_s, i_{s+1}]$ відповідає дуга $(i_s, i_{s+1}) \in \vec{\boldsymbol{U}}$, то за правилом (5.8)

$$x^*_{i_s i_{s+1}} < d_{i_s i_{s+1}}, \text{ тобто } d_{i_s i_{s+1}} - x^*_{i_s i_{s+1}} > 0; \tag{5.10}$$

б) якщо ланці $[i_s, i_{s+1}]$ відповідає дуга $(i_{s+1}, i_s) \in \vec{\boldsymbol{U}}$, то за правилом (5.9)

$$x^*_{i_{s+1} i_s} > 0. \tag{5.11}$$

Покладемо для ланки $[i_s, i_{s+1}]$ ланцюга $\boldsymbol{l}$

$$\theta_{i_s i_{s+1}} = \begin{cases} d_{i_s i_{s+1}} - x^*_{i_s i_{s+1}} > 0, & \text{у випадку а), формула (5.10),} \\ x^*_{i_{s+1} i_s} > 0 & \text{у випадку б), формула (5.11),} \end{cases} \tag{5.12}$$

та знайдемо

$$\theta = \min_{s = \overline{1, m-1}} \theta_{i_s i_{s+1}} > 0. \tag{5.13}$$

Змінимо вздовж ланцюга $\boldsymbol{l}$ потік $\boldsymbol{X}^*$, збільшуючи дугові потоки x^*_{ij} на $\theta > 0$ у випадку **а)** та зменшуючи дугові потоки x^*_{ij} на $\theta > 0$ у випадку **б)**. Тим самим із джерела s у стік t буде додатково проведено $\theta > 0$ одиниць потоку. Отримаємо новий допустимий потік з величиною $b^* + \theta > b^*$, що суперечить максимальності потоку $\boldsymbol{X}^*$. Отже, припущення було невірним, і $t \notin \boldsymbol{C}^*$.

Далі, за критерієм існування допустимого потоку на мережі для довільної підмножини вершин $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{I}$, яка породжує розріз мережі $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C})$, що відділяє джерело s від стоку t, маємо

$$b^* \le d(\boldsymbol{C}). \tag{5.14}$$

Покажемо, що

$$b^* = d(\boldsymbol{C}^*). \tag{5.15}$$

Тим самим буде доведено, що $\boldsymbol{C}^*$ породжує мінімальний розріз мережі, який відділяє джерело s від стоку t.

З визначення (5.7) – (5.9) множини $\boldsymbol{C}^*$ випливає правило:

1) якщо $i \in \boldsymbol{C}^*$, $j \notin \boldsymbol{C}^*$ і $\exists (i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$, то $x_{ij}^* = d_{ij}$; (5.16)

2) якщо $i \in \boldsymbol{C}^*$, $k \notin \boldsymbol{C}^*$ і $\exists (k, i) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$, то $x_{ki}^* = 0$. (5.17)

Оскільки $\boldsymbol{X}^*$ – допустимий потік, то згідно з (5.1) у вершинах $i \in \boldsymbol{C}^*$ маємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{\{j:(i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij}^* = b^*, \ i = s, \\ \sum\limits_{\{j:(i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij}^* - \sum\limits_{\{k:(k,i)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki}^* = 0, \ i \in \boldsymbol{C}^*, \ i \neq s. \end{cases} \tag{5.18}$$

Підсумовуючи почленно рівності (5.18) по всіх $i \in \boldsymbol{C}^*$, отримаємо

$$\sum_{\{i,j:\ i\in\boldsymbol{C}^*,(i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij}^* - \sum_{\{k,i:\ i\in\boldsymbol{C}^*,(k,i)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki}^* = b^*. \tag{5.19}$$

Розіб'ємо ліву частину (5.19) на доданки у залежності від того $j,k \in \boldsymbol{C}^*$, чи $j,k \notin \boldsymbol{C}^*$. Маємо

$$\begin{aligned} &\sum_{\{i,j:\ i\in\boldsymbol{C}^*,\ j\notin\boldsymbol{C}^*,\ (i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij}^* + \sum_{\{i,j:\ i\in\boldsymbol{C}^*,\ j\in\boldsymbol{C}^*,\ (i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ij}^* \\ &- \sum_{\{k,i:\ i\in\boldsymbol{C}^*,\ k\in\boldsymbol{C}^*,\ (k,i)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki}^* - \sum_{\{k,i:\ i\in\boldsymbol{C}^*,\ k\notin\boldsymbol{C}^*,\ (k,i)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} x_{ki}^* = b^*. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Звідси, враховуючи (5.16), (5.17), остаточно отримаємо

$$\sum_{\{i,j:\ i\in\boldsymbol{C}^*,\ j\notin\boldsymbol{C}^*,\ (i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\}} d_{ij} = b^*, \tag{5.21}$$

тобто $\sum\limits_{(i,j)\in\overrightarrow{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}^*)} d_{ij} = b^*$, що і означає $b^* = d(\boldsymbol{C}^*)$.

Теорема доведена.

Зауваження. З доведення теореми Форда-Фалкерсона випливає (формула (5.16)), що на дугах мінімального розрізу $(i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}^*)$ компоненти максимального потоку x_{ij}^* дорівнюють пропускним спроможностям цих дуг

$$x_{ij}^* = d_{ij}, \ (i, j) \in \overrightarrow{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}^*).$$

У цьому випадку говорять, що максимальний потік X^* насичує дуги мінімального розрізу.

5.3. Метод Форда-Фалкерсона побудови максимального потоку.

Теорема Форда-Фалкерсона покладена в основу одноіменного методу побудови максимального потоку на мережі з єдиним джерелом і єдиним стоком. Фактично метод Форда-Фалкерсона являє собою ітераційну процедуру, яка будує на основі правила (5.7) – (5.9) підмножину вершин C^*, що породжує мінімальний розріз мережі, який відділяє джерело від стоку.

Правило (5.7) – (5.9) дозволяє, виходячи з довільного допустимого потоку X^n із джерела s у стік t, побудувати відповідну йому множину вершин C^n. Якщо $t \notin C^*$, то $C^n = C^*$, і за теоремою Форда-Фалкерсона потік $X^n = X^*$ є максимальним потоком. Якщо $t \in C^*$, то, як випливає із доведення теореми Форда-Фалкерсона, існують число $\theta^n > 0$ та новий потік на мережі $X^{n+1} = \{x_{ij}^{n+1} : (i,j) \in \vec{U}\}$ з величиною $b^{n+1} = b^n + \theta^n$. Після побудови потоку X^{n+1} знову переходять до побудови множини C^{n+1} на основі цього потоку і т. д. доти, поки на якомусь кроці не буде отриманий потік X^m, величину якого збільшити неможливо. При цьому, очевидно, буде виконуватись умова $t \notin C^m = C^*$.

Якщо у (5.2) деякі, але не всі, $d_{ij} = \infty$, то у випадку існування максимального потоку нескінченної величини із джерела s у стік t, на деякій ітерації n величина θ^n стане нескінченно великою, і процес збільшення величини потоку буде зупинено.

5.3.1. Алгоритм методу Форда-Фалкерсона.

Алгоритм складається з однотипних ітерацій та попереднього етапу визначення початкового допустимого потоку $X^0 = \{x_{ij}^0 : (i,j) \in \vec{U}\}$ із джерела s у стік t ненульової величини $b^0 \neq 0$. Якщо такий потік визначити складно, то завжди можна прийняти за початковий потік нульової величини $X^0 = \{x_{ij}^0 = 0 : (i,j) \in \vec{U}\}$.

Визначення множин C^n та величин θ^n об'єднують в один процес – процес позначення вершин. Позначка (N_i, θ_i) позначеної вершини $i(N_i, \theta_i)$

складається із двох чисел N_i та θ_i. Ці числа означають, що вздовж деякого ланцюга, останнє ребро якого $[|N_i|, i]$, у вершину i із джерела s додатково може бути доставлено θ_i одиниць потоку.

Розглянемо довільну ітерацію алгоритму Форда-Фалкерсона на основі існуючого на мережі потоку $\boldsymbol{X}^n$ із джерела s у стік t (він може бути початковим чи отриманим в результаті деякого числа ітерацій алгоритму):

Крок 1.

1. Позначити джерело $s = 1$ числами $N_1 = 0,\ \theta_1 = \infty$.

2. Утворити множину вершин $\boldsymbol{I}^{(1)} = \{1(0, \infty)\}$, позначених на першому кроці.

Далі здійснюється процедура позначення вершин. Вона складається із однотипних кроків. Нехай здійснено r таких кроків, за які побудована множина позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(r)} = \{..., i(N_i, \theta_i), ...\}$. Перейдемо до кроку $r+1$.

Крок $(r+1)$.

1. Побудувати множину $\boldsymbol{J}_{-}^{(r)} = \{..., j, ...\}$ непозначених вершин j, для яких

$$(i, j) \in \vec{\boldsymbol{U}},\ i \in \boldsymbol{I}^{(r)},\ j \in \boldsymbol{J}_{-}^{(r)},\ d_{ij} - x_{ij}^{n} > 0 .$$

2. Побудувати множину $\boldsymbol{J}_{+}^{(r)} = \{..., k, ...\}$ непозначених вершин k, для яких

$$(k, i) \in \vec{\boldsymbol{U}},\ i \in \boldsymbol{I}^{(r)},\ k \in \boldsymbol{J}_{+}^{(r)},\ x_{ki}^{n} > 0,\ \boldsymbol{J}_{+}^{(r)} \cap \boldsymbol{J}_{-}^{(r)} = \varnothing .$$

3. Перевірити умову: одночасно $\boldsymbol{J}_{-}^{(r)} = \varnothing$ і $\boldsymbol{J}_{+}^{(r)} = \varnothing$.

Якщо умова виконується, то – кінець обчислень. Потік $\boldsymbol{X}^n$ максимальний, а множина позначених вершин $\boldsymbol{I}^{(r)} = \boldsymbol{C}^*$ породжує мінімальний розріз мережі $\vec{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{C}^*)$, що відділяє джерело s від стоку t.

В іншому випадку – перейти до наступного кроку.

4. Перевірити умову для стоку t: $t \in \boldsymbol{J}_{-}^{(r)}$.

Якщо умова виконується, то перейти до пункту 6, інакше – перейти до наступного пункту 5.

5. Кожну вершину $j \in \boldsymbol{J}_{-}^{(r)}$ позначити числами

$$N_j = i,\ \theta_j = \min(\theta_i, d_{ij} - x_{ij}^{n}),$$

де $i \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ – початок дуги (i, j), яка заходить у вершину $j \in \boldsymbol{J}_{-}^{(r)}$. Кожну вершину $k \in \boldsymbol{J}_{+}^{(r)}$ позначити числами

$$N_k = -i,\ \theta_k = \min(\theta_i, x_{ki}^n)\ ,$$

де $i \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ – кінець дуги (k,i) , яка виходить з вершини $k \in \boldsymbol{J}_+^{(r)}$.

Утворити множину $\boldsymbol{I}^{(r+1)}$ вершин, позначених за всі кроки, починаючи з першого і закінчуючи $(r+1)$ – м:

$$\boldsymbol{I}^{(r+1)} = \boldsymbol{I}^{(r)} \cup \boldsymbol{P}^{(r+1)}\ ,$$

де $\boldsymbol{P}^{(r+1)}$ – множина вершин, позначених на $(r+1)$ – му кроці.

Перейти до наступного $(r+2)$ – го кроку.

6. Позначити стік $t \in \boldsymbol{J}_-^{(r)}$ числами

$$N_t = i,\ \theta_t = \min(\theta_i, d_{it} - x_{it}^n)\ ,$$

де $i \in \boldsymbol{I}^{(r)}$ – початок дуги (i,t) , яка заходить у стік $t \in \boldsymbol{J}_-^{(r)}$, і перейти до наступного пункту 7 (до початку зміни існуючого потоку $\boldsymbol{X}^n$).

7. Збільшити на θ_t потік по дузі (i,t)

$$x_{it}^{n+1} = x_{it}^n + \theta_t$$

та перейти до вершини $i(N_i, \theta_i)$.

Якщо $N_i > 0$, то покладають $x_{li}^{n+1} = x_{li}^n + \theta_t$, де $l = N_i$.

Якщо $N_i < 0$, то покладають $x_{il}^{n+1} = x_{il}^n - \theta_t$, де $l = |N_i|$.

Перейти до вершини $l(N_l, \theta_l)$ і здійснити для неї ту саму процедуру, що і для вершини i .

Процес послідовної зміни потоків на дугах мережі продовжують доти, поки не буде досягнуте джерело s . При цьому величина існуючого потоку $\boldsymbol{X}^n$ збільшиться на θ_t .

Кінець ітерації на основі потоку $\boldsymbol{X}^n$.

Підкреслимо, що зміни потоку здійснюються, починаючи з кінця деякого ланцюга $\boldsymbol{l} = [s = i_1, i_2, ..., i_m = t]$, який проходить через позначені вершини $i_k \in \boldsymbol{C}^n\ (k = \overline{1,m})$ і сполучає джерело s і стік t .

Після зміни потоку витирають позначки вершин мережі і переходять до нової ітерації на основі нового потоку $\boldsymbol{X}^{n+1}$, який відрізняється від потоку $\boldsymbol{X}^n$ лише дуговими потоками вздовж ланцюга $\boldsymbol{l}$.

5.3.2. Приклад.

Знайти максимальний потік на мережі (див. рис.11) з єдиним джерелом (вершина 1) і єдиним стоком (вершина 8) при прийнятих позначеннях $i \bigcirc \xrightarrow{x_{ij}(d_{ij})} \bigcirc j$.

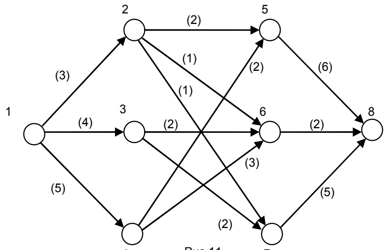


Рис.11

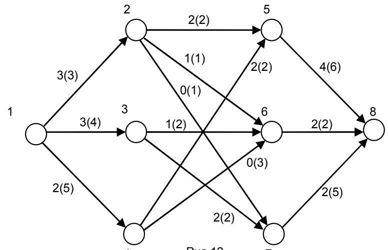


Рис.12

Розв'язування. З метою зменшення кількості ітерацій методу Форда-Фалкерсона приймемо за початковий потік X^0 ненульовий допустимий потік (див.рис.12), який будуємо послідовно знаходячи шляхи на мережі із джерела 1 у стік 8 і збільшуючи дугові потоки вздовж кожного такого шляху на максимально можливу величину.

Прикладом першого такого шляху може бути шлях $\{(1,2),(2,5),(5,8)\}$ наведений на рис.13. Найвужчим місцем цього шляху є дуга $(2,5)$ (див. рис.11), тому при відсутності потоку по дузі $(2,5)$ її пропускна спроможність $d_{25} = 2$ і визначає максимальну кількість одиниць потоку (рівну двом), що можуть бути проведені дугами цього шляху.

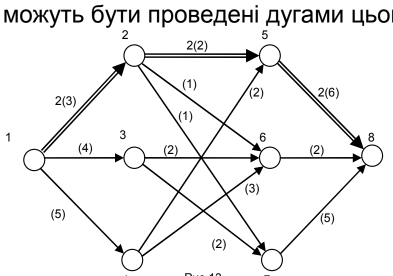


Рис.13

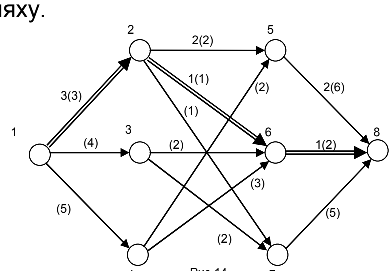


Рис.14

За приклад наступного такого шляху можна взяти шлях $\{(1,2),(2,6),(6,8)\}$ наведений на рис.14. Найвужчими місцями цього шляху є дуги $(1,2)$ та $(2,6)$. Оскільки $d_{12} - x_{12} = 3 - 2 = 1$ і $d_{26} - x_{26} = 1 - 0 = 1$ (див.рис.13), то максимальна кількість одиниць потоку, що можуть бути проведені вздовж цього шляху, дорівнює одиниці.

Наступні побудови шляхів із джерела 1 у стік 8 наводимо без додаткових коментарів (рис.15 – 17).

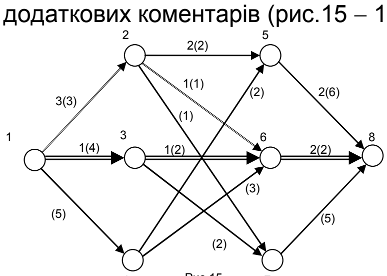


Рис.15

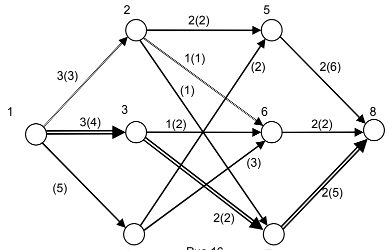


Рис.16

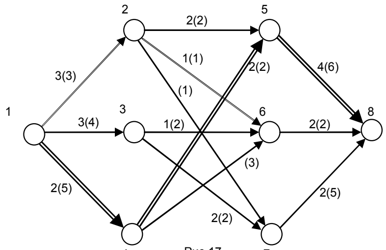


Рис.17

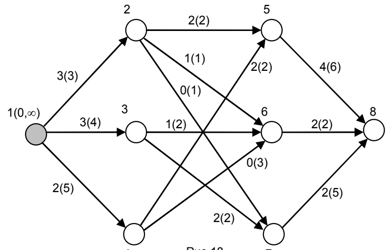


Рис.18

Ітерація I на основі потоку X^0 (рис.12).

Крок 1. Позначаємо джерело – вершину 1 позначками $N_1 = 0,\ \theta_1 = \infty$. Після першого кроку множиною позначених вершин є $\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{P}^{(1)} = \{1(0,\infty)\}$ (рис.18, виділена тоном).

Крок 2.

Будуємо множину $\boldsymbol{J}_{-}^{(1)} = \{3,4\}$ непозначених вершин, в які заходять ненасичені потоком дуги

$$(1,3),\ d_{13} - x_{13}^0 = 4 - 3 = 1 > 0\ ,$$

$$(1,4),\ d_{14} - x_{14}^0 = 5 - 2 = 3 > 0\ ,$$

що виходять з позначених вершин.

Множина непозначених вершин, з яких виходять дуги з ненульовим потоком, що заходять у позначені вершини порожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(1)} = \varnothing$.

Позначаємо вершини множини $\boldsymbol{J}_{-}^{(1)} = \{3,4\}$:

оскільки $N_3 = 1,\ \theta_3 = \min(\theta_1, d_{13} - x_{13}^0) = \min(\infty, 1) = 1$, то $3(1,1)$, оскільки $N_4 = 1,\ \theta_4 = \min(\theta_1, d_{14} - x_{14}^0) = \min(\infty, 3) = 3$, то $4(1,3)$.

Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(2)}$ позначених вершин за два кроки (див.рис.19):

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \bigcup \boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \bigcup \{3(1,1), 4(1,3)\} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3)\} .$$

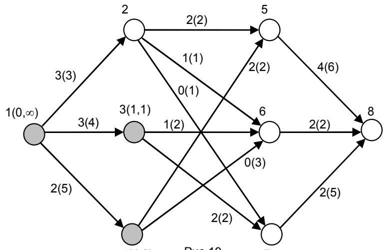


Рис.19

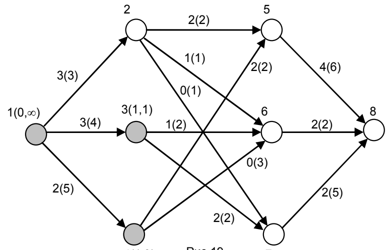


Рис.19

Крок 3.

Будуємо множину $\boldsymbol{J}_{-}^{(2)} = \{6\}$ непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг

$(3,6),\ d_{36} - x_{36}^0 = 2 - 1 = 1 > 0$,

$(4,6),\ d_{46} - x_{46}^0 = 3 - 0 = 3 > 0$,

які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(2)} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3)\}$.

Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком, які заходять у позначені вершини множини $\boldsymbol{I}^{(2)} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3)\}$, порожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(2)} = \varnothing$.

Позначаємо єдину вершину множини $\boldsymbol{J}_{-}^{(2)} = \{6\}$. Оскільки вершину 6 можна позначити як із вершини $3(1,1)$, так і із вершини $4(1,3)$, то приймемо за правило позначати найбільшу кількість вершин з позначеної вершини з найменшим номером, тому:

$6(3,1)$, оскільки $N_6 = 3,\ \theta_6 = \min(\theta_3, d_{36} - x_{36}^0) = \min(1, 2 - 1) = 1$.

Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(3)}$ позначених вершин за три кроки (див.рис.20):

$$\boldsymbol{I}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \bigcup \boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \bigcup \{6(3,1)\} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1)\} .$$

Крок 4.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг, які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(3)} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1)\}$, порожня: $\boldsymbol{J}_{-}^{(3)} = \varnothing$.

Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком

$$(2,6),\ x_{26}^{0} = 1 > 0\ ,$$

які заходять у позначені вершини множини $\boldsymbol{I}^{(3)} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1)\}$, непорожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(3)} = \{2\}$.

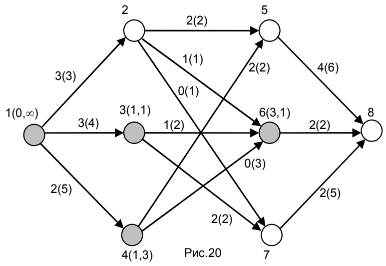


Рис.20

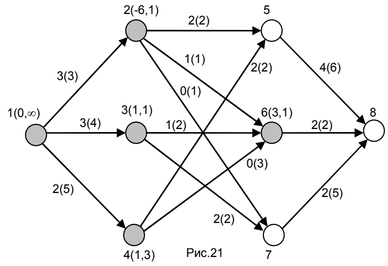


Рис.21

Позначаємо єдину вершину множини $\boldsymbol{J}_{+}^{(3)} = \{2\}$: $2(-6,1)$, оскільки $N_2 = -6,\ \theta_2 = \min(\theta_6, x_{26}^{0}) = \min(1,1) = 1$.

Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(4)}$ позначених вершин за чотири кроки (див.рис.21):

$$\boldsymbol{I}^{(4)} = \boldsymbol{I}^{(3)} \cup \boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{I}^{(3)} \cup \{2(-6,1)\} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1), 2(-6,1)\}\ .$$

Крок 5.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг

$$(2,7),\ d_{27} - x_{27}^{0} = 1 - 0 = 1 > 0\ ,$$

які виходять з позначених вершин множини

$$\boldsymbol{I}^{(4)} = \{1(0,\infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1), (-6,1)\}\ ,$$

непорожня: $\boldsymbol{J}_{-}^{(4)} = \{7\}$.

Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком, які заходять у позначені вершини множини $\boldsymbol{I}^{(4)}$, порожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(4)} = \varnothing$.

Позначаємо єдину вершину множини $\boldsymbol{J}_{-}^{(4)} = \{7\}$: $7(2,1)$, оскільки $N_7 = 2,\ \theta_7 = \min(\theta_2, d_{27} - x_{27}^{0}) = \min(1,1) = 1$.

Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(5)}$ позначених вершин за п’ять кроків (див.рис.22):

$$\boldsymbol{I}^{(5)} = \boldsymbol{I}^{(4)} \cup \boldsymbol{P}^{(5)} = \boldsymbol{I}^{(4)} \cup \{(7(2,1)\} = \{1(0,\infty),3(1,1),4(1,3),6(3,1),2(-6,1),7(2,1)\}$$

.

Крок 6.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг

$(7,8),\ d_{78} - x^{0}_{78} = 5 - 2 = 3 > 0$,

які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(5)}$, непорожня: $\boldsymbol{J}^{(5)}_{-} = \{8\}$. Єдиний її елемент – це стік 8 . Позначаємо стік $8(7,1)$, оскільки

$N_8 = 7,\ \theta_8 = \min(\theta_7, d_{78} - x^{0}_{78}) = \min(1,3) = 1$,

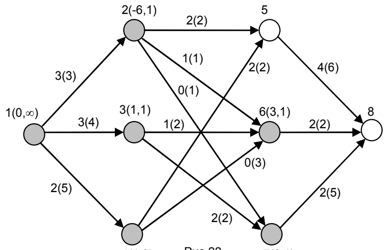


Рис.22

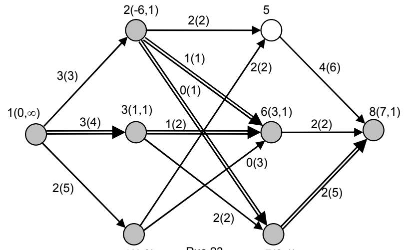


Рис.23

та записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(6)}$ позначених вершин за шість кроків (див.рис.23):

$$\boldsymbol{I}^{(6)} = \boldsymbol{I}^{(5)} \cup \boldsymbol{P}^{(6)} = \boldsymbol{I}^{(5)} \cup \{(8(7,1)\} = \{1(0,\infty),3(1,1),4(1,3),6(3,1),2(-6,1),7(2,1),(8(7,1)\} .$$

Після позначення стоку 8 процес позначок вершин припиняємо і переходимо до етапу зміни потоку. Дугові потоки змінюємо вздовж ланцюга $\boldsymbol{l} = \{[1,3],[3,6],[6,2],[2,7],[7,8]\}$ (йому відповідають виділені дуги на рис.23), починаючи з його кінця, тобто з дуги, яка заходить у стік 8 :

оскільки для стоку $8(7,1)$ перша позначка $N_8 = 7 > 0$, то $x^{1}_{78} = x^{0}_{78} + \theta_8 = 2 + 1 = 3$;

оскільки для вершини $7(2,1)$ перша позначка $N_7 = 2 > 0$, то $x^{1}_{27} = x^{0}_{27} + \theta_8 = 0 + 1 = 1$;

оскільки для вершини $2(-6,1)$ перша позначка $N_2 = -6 < 0$, то $x^{1}_{26} = x^{0}_{26} - \theta_8 = 1 - 1 = 0$;

оскільки для вершини $6(3,1)$ перша позначка $N_6 = 3 > 0$, то $x_{36}^1 = x_{36}^0 + \theta_8 = 1 + 1 = 2$;

оскільки для вершини $3(1,1)$ перша позначка $N_3 = 1 > 0$, то $x_{13}^1 = x_{13}^0 + \theta_8 = 3 + 1 = 4$.

Ми отримали новий допустимий потік $\boldsymbol{X}^{(1)}$, який відрізняється від потоку $\boldsymbol{X}^{(0)}$ щойно обчисленими компонентами $x_{78}^1, x_{27}^1, x_{26}^1, x_{36}^1, x_{13}^1$. Стираємо всі позначки вершин мережі і переходимо до нової ітерації на основі потоку $\boldsymbol{X}^{(1)}$ (див.рис.24).

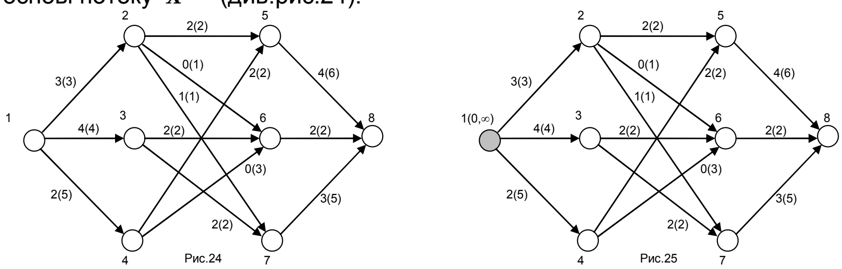


Рис.24 Рис.25

Ітерація II на основі потоку $\boldsymbol{X}^1$ (рис.24).

Крок 1. Позначаємо джерело – вершину 1 позначками $N_1 = 0,\ \theta_1 = \infty$. Після першого кроку множиною позначених вершин є $\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{P}^{(1)} = \{1(0,\infty)\}$ (рис.25, виділена тоном).

Крок 2.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг

$(1,4),\ d_{14} - x_{14}^1 = 5 - 2 = 3 > 0$,

які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(1)}$, непорожня: $\boldsymbol{J}_{-}^{(1)} = \{4\}$. Множина непозначених вершин, з яких виходять дуги з ненульовим потоком, що заходять у позначені вершини порожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(1)} = \varnothing$. Позначаємо єдину вершину множини $\boldsymbol{J}_{-}^{(1)} = \{4\}$: $4(1,3)$, оскільки

$$N_4 = 1,\ \theta_4 = \min(\theta_1, d_{14} - x_{14}^1) = \min(\infty, 3) = 3 .$$

Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(2)}$ позначених вершин за два кроки (див.рис.26):

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \bigcup \boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{I}^{(1)} \bigcup \{4(1,3)\} = \{1(0,\infty), 4(1,3)\} .$$

Крок 3.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг

$$(4,6),\ \ d_{46} - x_{246}^{1} = 3 - 0 = 3 > 0\ ,$$

які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(2)}$, непорожня: $\boldsymbol{J}_{-}^{(2)} = \{6\}$.

Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком, які заходять у позначені вершини множини $\boldsymbol{I}^{(2)}$, порожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(2)} = \varnothing$.

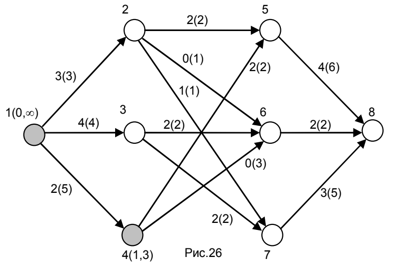


Рис.26

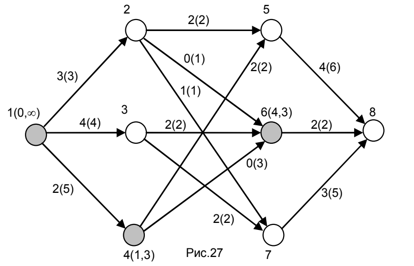


Рис.27

Позначками вершини 6 множини $\boldsymbol{J}_{-}^{(2)} = \{6\}$ є

$$N_6 = 4,\ \ \theta_6 = \min(\theta_4, d_{46} - x_{46}^{1}) = \min(3,3) = 3\ ,$$

тобто $6(4,3)$. Записуємо множину $\boldsymbol{I}^{(3)}$ позначених вершин за три кроки (див.рис.27):

$$\boldsymbol{I}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \cup \boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{I}^{(2)} \cup \{(6(4,3))\} = \{1(0,\infty), 4(1,3), 6(4,3)\}\ .$$

Крок 4.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг, які виходять з позначених вершин множини $\boldsymbol{I}^{(3)}$, порожня: $\boldsymbol{J}_{-}^{(3)} = \varnothing$. Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком

$$(3,6),\ \ x_{36}^{1} = 2 > 0\ ,$$

які заходять у позначені вершини множини $\boldsymbol{I}^{(3)}$, непорожня: $\boldsymbol{J}_{+}^{(3)} = \{3\}$.

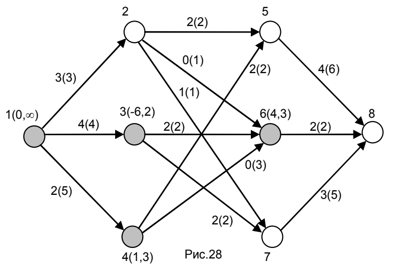


Рис.28

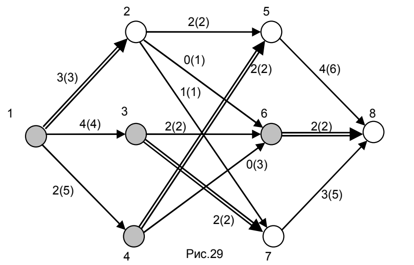


Рис.29

Позначаємо єдину вершину множини $J_{+}^{(3)} = \{3\}$: $3(-6,2)$, оскільки

$$N_3 = -6,\ \theta_3 = \min(\theta_6, x_{36}^1) = \min(3,2) = 2 .$$

Записуємо множину $I^{(4)}$ позначених вершин за чотири кроки (див.рис.28):

$$I^{(4)} = I^{(3)} \cup P^{(4)} = I^{(3)} \cup \{3(-6,1)\} = \{1(0,\infty),4(1,3),6(4,3),3(-6,2)\} .$$

Крок 5. Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг, які виходять з позначених вершин множини $I^{(4)}$, порожня: $J_{-}^{(4)} = \varnothing$. Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком, які заходять у позначені вершини множини $I^{(4)}$, також порожня: $J_{+}^{(4)} = \varnothing$.

Подальший процес позначень вершин неможливий. Оскільки стік 8 непозначений, то існуючий потік X^1 (див.рис.29) на мережі є максимальним. При цьому підмножина вершин $C^* = I^{(4)} = \{1, 3, 4, 6\}$ (див.рис.29, відтоновані сірим) породжує мінімальний розріз мережі $\vec{U}(C^*) = \{(1,2),(3,7),(4,5),(6,8)\}$ (див.рис.29, виділені дуги), що відділяє джерело 1 від стоку 8 . Пропускна спроможність цього розрізу $d(C^*) = 3+2+2+2 = 9$ за теоремою Форда-Фалкерсона дорівнює величині $b^* = 9$ максимального потоку $X^* = X^1$ із джерела 1 у стік 8 .

5.3.3. Завдання для самостійного розв'язування.

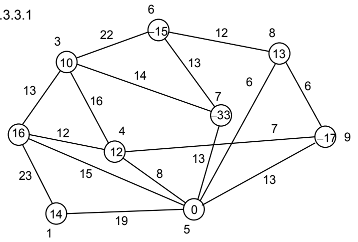
Побудувати на даних мережах максимальні потоки із заданої множини джерел у задану множину стоків ([5], ст.132–144).

Вказівка 1. Перевірити умову балансу мережі – сумарна інтенсивність вершин мережі має дорівнювати нулю.

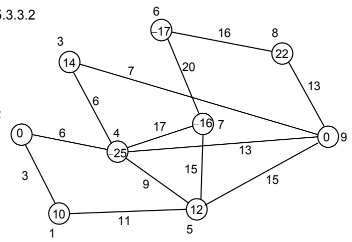
Вказівка 2. При розв'язуванні задач ребра мережі замінити парою протилежно спрямованих дуг однакової пропускної спроможності, що дорівнює пропускній спроможності відповідного ребра.

Вказівка 3. Мережу з багатьма джерелами та багатьма стоками попередньо звести до мережі з єдиним джерелом та єдиним стоком. Таке зведення здійснюють шляхом введення фіктивного джерела з інтенсивністю, що дорівнює сумарній інтенсивності всіх джерел, та фіктивного стоку, інтенсивність якого також дорівнює сумарній інтенсивності всіх стоків. Фіктивне джерело сполучають фіктивними дугами, що виходять з нього, зі всіма джерелами, покладаючи їх пропускні спроможності рівними інтенсивностям джерел, в які вони заходять. Всі стоки сполучають фіктивними дугами, що виходять з них, з фіктивним стоком, покладаючи їх пропускні спроможності рівними модулям інтенсивностей стоків, з яких вони виходять. Інтенсивності всіх джерел і стоків, окрім фіктивних, обнуляють. Отримують мережу з єдиним джерелом та єдиним стоком, максимальний потік на якій знаходять методом Форда-Фалкерсона. Відкидаючи після цього введені фіктивні елементи мережі та відновлюючи інтенсивності джерел і стоків, отримують мережу з максимальним потоком із даної множини джерел у дану множину стоків.

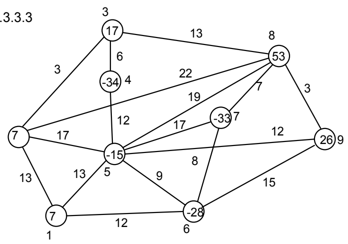
5.3.3.1



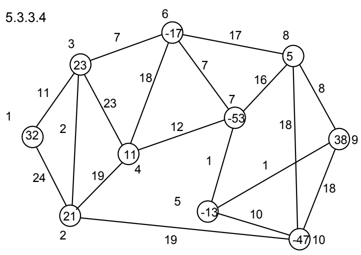
5.3.3.2



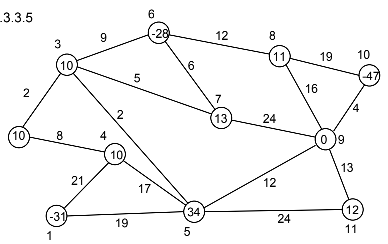
5.3.3.3



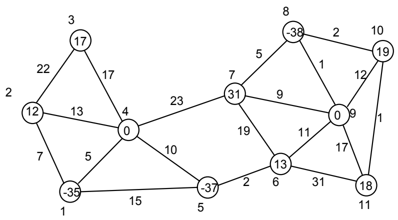
5.3.3.4



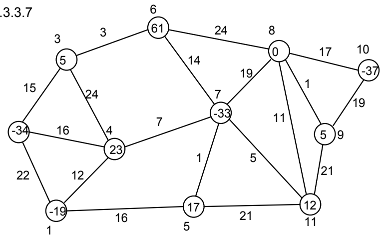
5.3.3.5



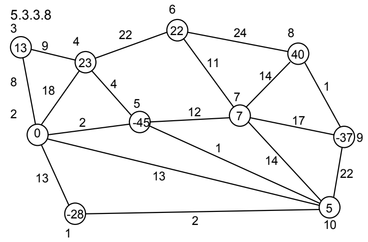
5.3.3.6



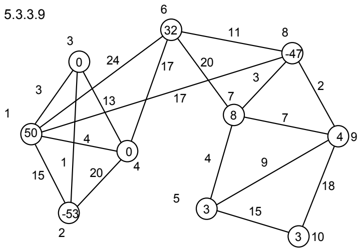
5.3.3.7



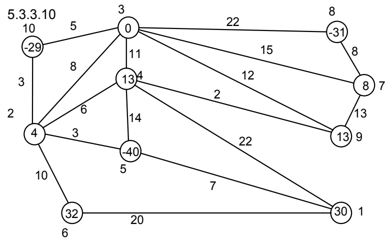
5.3.3.8



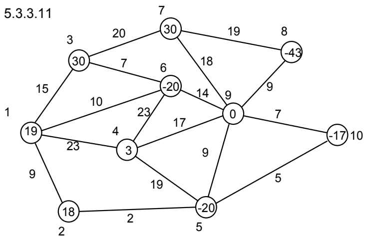
5.3.3.9



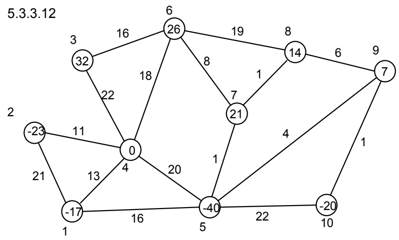
5.3.3.10



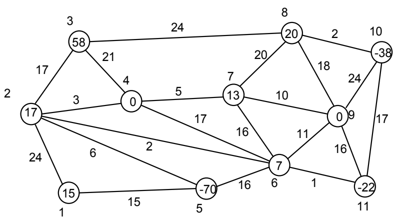
5.3.3.11



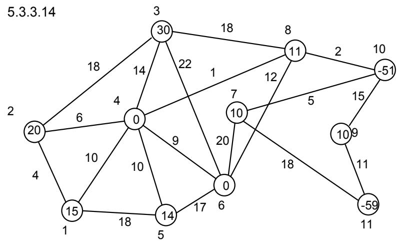
5.3.3.12



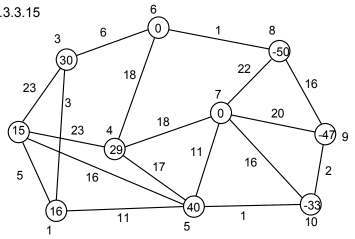
5.3.3.13



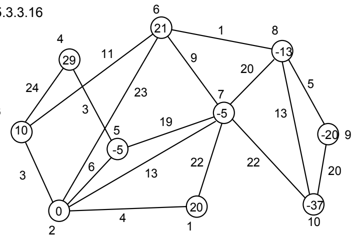
5.3.3.14



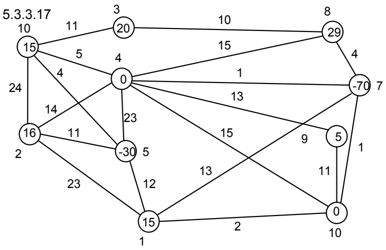
5.3.3.15



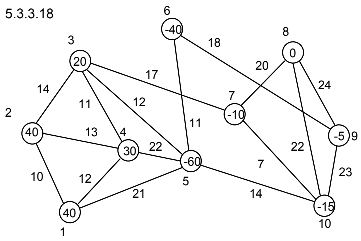
5.3.3.16



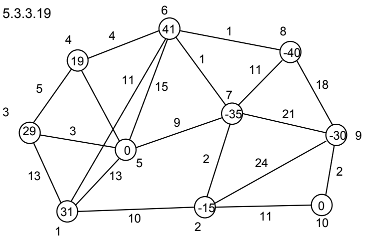
5.3.3.17



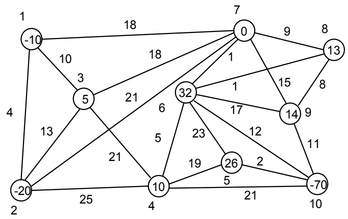
5.3.3.18



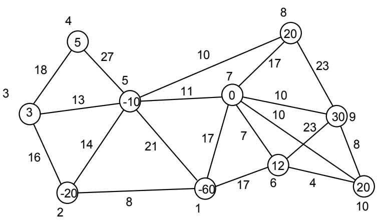
5.3.3.19



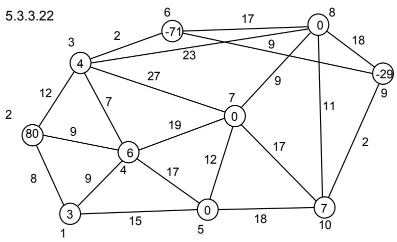
5.3.3.20



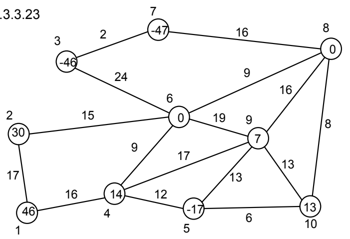
5.3.3.21



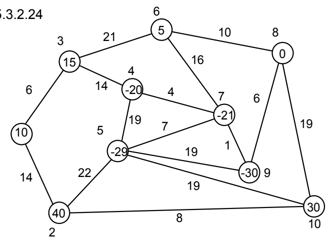
5.3.3.22



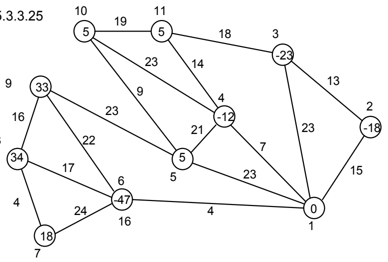
5.3.3.23



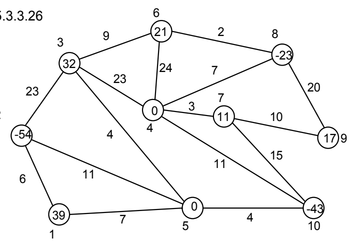
5.3.2.24



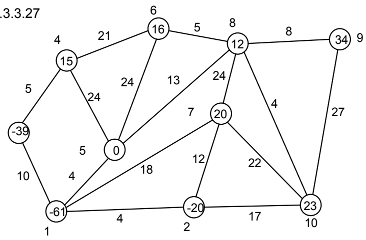
5.3.3.25



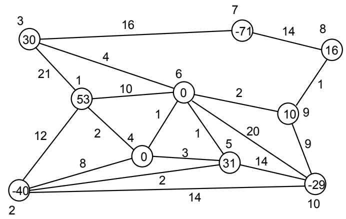
5.3.3.26



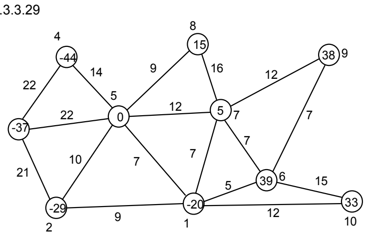
5.3.3.27



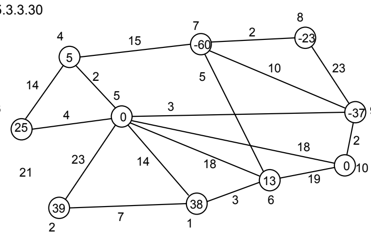
5.3.3.28



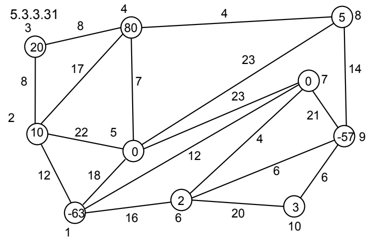
5.3.3.29



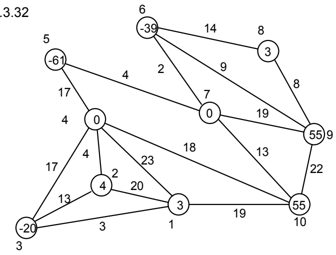
5.3.3.30



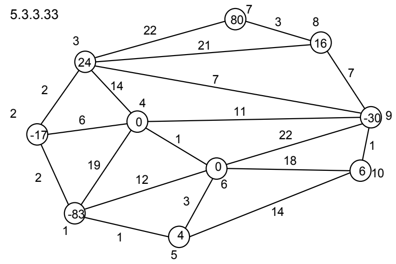
5.3.3.31



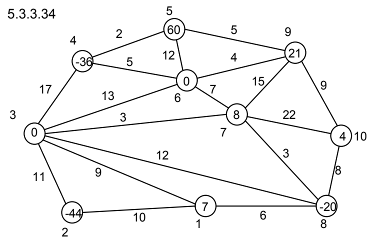
5.3.3.32



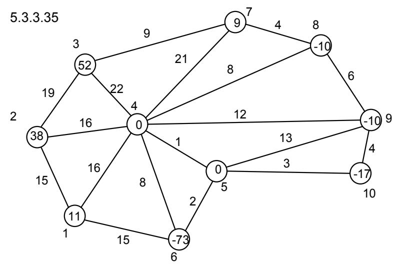
5.3.3.33



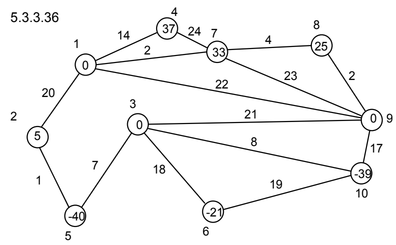
5.3.3.34



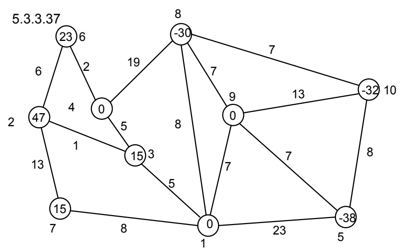
5.3.3.35



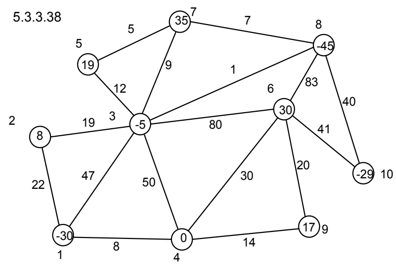
5.3.3.36



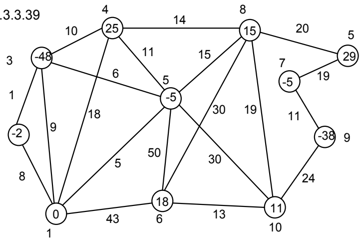
5.3.3.37



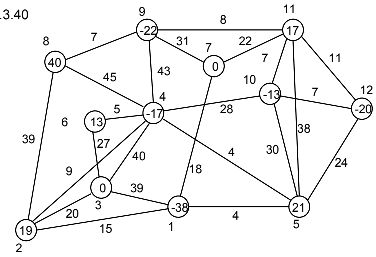
5.3.3.38



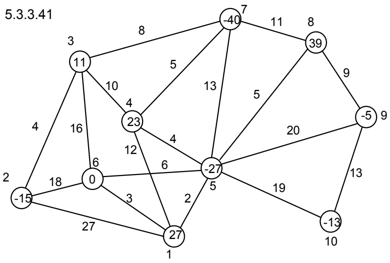
5.3.3.39



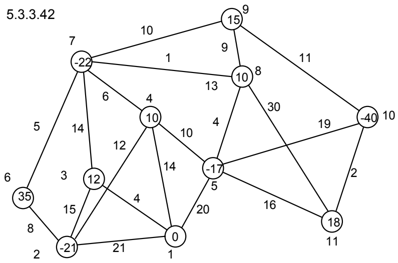
5.3.3.40



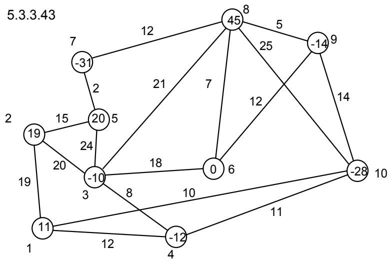
5.3.3.41



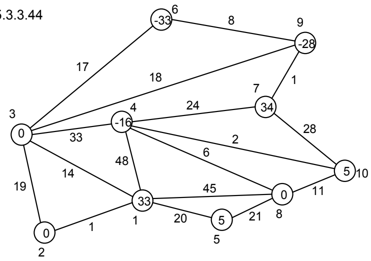
5.3.3.42



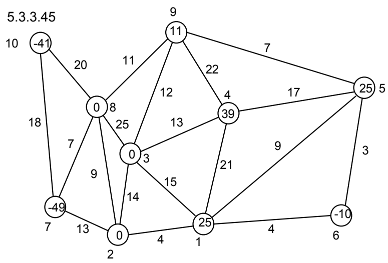
5.3.3.43



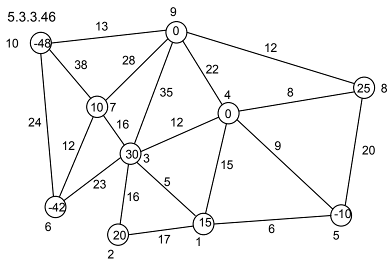
5.3.3.44



5.3.3.45



5.3.3.46



Додаток.

Тема: “Потоки на мережах.”.

Лекція 17. Потоки на мережах. Задача про найкоротший шлях на мережі. Метод Мінті. – 2год.

Означення мережі, інтенсивності вершин та пропускні спроможності дуг мережі. Означення однорідного потоку на мережі. Рівняння нерозривності потоку. Розріз мережі, його пропускна спроможність. Критерій існування однорідного потоку на мережі. Задача про оптимальний потік на мережі. Задача про найкоротший шлях на мережі. Метод Мінті, алгоритм. Теорема про оптимальність шляху, знайденого методом Мінті.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Означення мережі, інтенсивності вершин та пропускні спроможності дуг мережі. Означення однорідного потоку на мережі. Рівняння нерозривності потоку. Розріз мережі, його пропускна спроможність. Критерій існування однорідного потоку на мережі. Задача про оптимальний потік на мережі. Задача про найкоротший шлях на мережі. Метод Мінті, алгоритм. Теорема про оптимальність шляху, знайденого методом Мінті.

Лабораторна робота. Розв’язування задачі про найкоротший шлях методом Мінті. – 2год.

1. На даній в індивідуальному завданні мережі побудувати методом Мінті дерево найкоротших шляхів з коренем у заданій вершині.
2. Записати найкоротший шлях (та його довжину) із кореня знайденого дерева в задану вершину.

Лекція 18. Задача про максимальний потік на мережі. Метод Форда-Фалкерсона. – 2год.

Задача про максимальний потік на мережі. Розріз мережі, що відділяє джерело від стоку. Задача про мінімальний розріз мережі. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм методу Форда-Фалкерсона.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Задача про максимальний потік на мережі. Розріз мережі, що відділяє джерело від стоку. Задача про мінімальний розріз мережі. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм методу Форда-Фалкерсона.

Лабораторна робота. Розв'язування задачі про максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. – 2год.

1. Звести дану в індивідуальному завданні мережу з багатьма джерелами та стоками до мережі з єдиним джерелом і стоком.
2. Побудувати на ній ненульовий початковий потік з єдиного джерела в єдиний стік.
3. Знайти методом Форда-Фалкерсона максимальний потік з єдиного джерела в єдиний стік, записати його величину.
4. Записати множину вершин, яка породжує мінімальний розріз мережі, та сам мінімальний розріз. Вказати його пропускну спроможність.
5. Перевірити теорему Форда-Фалкерсона.
6. Виділити на мережі мінімальний розріз.
7. Перетворити мережу з єдиним джерелом та стоком до початкового вигляду з багатьма джерелами та стоками.

Контрольні запитання до теми "Потоки на мережах".

1. Означення мережі, інтенсивності вершин та пропускні спроможності дуг мережі.
2. Означення однорідного потоку на мережі.
3. Рівняння нерозривності потоку.
4. Розріз мережі, його пропускна спроможність.
5. Критерій існування однорідного потоку на мережі.
6. Задача про оптимальний потік на мережі.
7. Задача про найкоротший шлях на мережі.
8. Метод Мінті, алгоритм.
9. Теорема про оптимальність шляху, знайденого методом Мінті.
10. Задача про максимальний потік на мережі.
11. Розріз мережі, що відділяє джерело від стоку.
12. Задача про мінімальний розріз мережі.
13. Теорема Форда-Фалкерсона.
14. Алгоритм методу Форда-Фалкерсона.

Список літератури.

(основна література – 1–5, додаткова – 6, 7)

1. Ермольев Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах. – К.: “Наукова думка”, 1968. – 176 с.

2. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: “Наука”, 1975. – 256 с.

3. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика», «Соціальна інформатика». – К.: Абрис, 1999. – 217 с.

4. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 479 с.

5. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 192 с.

6. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. – К.: Слово., 2006. – 816 с.

7. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач.– К.: Вища шк., 1990. – 239 с.

Зміст

Навчальний посібник

ОЛЕКСАНДР МАРАТОВИЧ ІКСАНОВ
ВІТАЛІЙ ІВАНОВИЧ ШЕВЧЕНКО

ПОТОКИ НА МЕРЕЖАХ
(КУРС “ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”)
46 с

Підписано до друку 1.11.2010. Формат 60 Х 84/16
Папір офсетний. Друк високий. Умов. друк. арк. 2,26
Умов, видав, арк. 2,33. Тираж; 300 прим. Замовлення 11-288

Наукове видавництво "ТВіМС"
Свідоцтво ДК110 від 05.07.2000 р.
Київ 03127, пр. Глушкова, 6
відділ замовлень tbimc@online.ua