Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Богатирьова Юлія Олександрівна

УДК 004.655

ТЕОРІЯ МУЛЬТИМНОЖИН ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник
Буй Дмитро Борисович

Київ – 2011

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

□	кінець формулювання твердження, леми або теореми, доведення
■	початок логічної частини доведення
▪	кінець логічної частини доведення
$dom\ \gamma$	область означеності часткової функції (предикату) γ, тобто проекція за першою компонентою γ
$range\ f$	область значень функції f, тобто проекція за другою компонентою функції f
T	булеве значення істини (True)
F	булеве значення хиби (False)
N	множина натуральних чисел $\{0, 1, 2, ...\}$
N^{+}	множина натуральних чисел без нуля $\{1, 2, ...\}$
$P(X)$, 2^{X}	булеан множини X
2^{X}_{fin}	сім'я скінченних підмножин множини X
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$	за означенням
$\overset{def}{=}$	дорівнює за означенням
$\varnothing$	порожня множина
$\varnothing_{m}$	порожня мультимножина
$\simeq$	узагальнена рівність
U_{α}	основа мультимножини α
χ_{α}	характеристична функція мультимножини α

$card(\alpha)$	потужність мультимножини α
$dim(\alpha)$	розмірність мультимножини α
$hgt\ \alpha$	пікове значення мультимножини α
$p(\alpha)$	піковий елемент мультимножини α
$\preceq$	відношення включення мультимножин
$\prec$	відношення строгого включення мультимножин
$\bigcup_{All}$, $\bigcup_1$	операція об’єднання з врахуванням та без врахування дублікатів
$\bigcap_{All}$, $\bigcap_1$	операція перетину з врахуванням та без врахування дублікатів
$+_{All}$, $+_1$	операція додавання з врахуванням та без врахування дублікатів
$\backslash_{All}$, $\backslash_1$	операція різниці з врахуванням та без врахування дублікатів
Δ_{All}, Δ_1	операція симетричної різниці з врахуванням та без врахування дублікатів
$\overline{\alpha}$	операція доповнення
$\bullet_{All}$, $\bullet_1$	операція добутку з врахуванням та без врахування дублікатів
$k \cdot \alpha$	операція множення числа на мультимножину
$\otimes$	операція прямого (декартового) з’єднання
sup	супремум
inf	інфімум
$\prod_{d \in D} N$	прямий добуток
$\nu\varphi$	арність функції (предикату)
$\oplus$	функція додавання множин (мультимножин)
$\div$	функція віднімання множин (мультимножин)

$s(x)$	функція слідування
I_m^n	селектор
$\varphi(\alpha)$	спеціальна функція над мультимножиною
ξ	нумерацію скінченних множин натуральних чисел
ξ_{M}	нумерацію скінченних мультимножин натуральних чисел
F_{ξ}	“кодуюча” множинна функція
$F_{\xi_{\mathrm{M}}}$	“кодуюча” мультимножинна функція
$F_{\xi^{-1}}$	“розкодуюча” множинна функція
$F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}$	“розкодуюча” мультимножинна функція
$[F \cup P]$	замикання множини функцій та предикатів у ППА
$f[\alpha]$	повний образ мультимножини α
$S^{(m+1)}$	параметрична суперпозиція функції у функцію (предикат)
$\Diamond^{(3)}$	тернарне розгалуження функцій (предикатів) за предикатом
$*^{(n+1)}$	параметричне циклування функцій за предикатом
$A, T, Ц, Г$	основи нуклеотидів: аденін, тимін, цитозин, гуанін відповідно
ч. в. м.	частково впорядкована множина
ППА	примітивна програмна алгебра
CTE	Common Table Expressions

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Існує ряд практичних задач інформатики та її застосувань, особливістю яких є множинність і повторюваність даних.

Репрезентативними прикладами таких задач є:

- уточнення таблиць із дублікатами рядків та маніпуляцій над таблицями у сучасних табличних (реляційних) базах даних;
- уточнення обчислень на ДНК;
- конкурсний відбір пропозицій на виконання робіт, заснований на багатокритеріальних оцінках заявок, зроблених декількома експертами;
- діагностика захворювань із подібними симптомами, при наявності висновків різних лікарів;
- соціологічні опитування різних груп населення стосовно певних проблем.

Зручною моделлю для подання та дослідження багатокритеріальних об’єктів є мультимножини – змістовно кажучи, сукупності з повтореннями.

Можливість присутності у мультимножині довільного, у тому числі й необмеженого, числа елементів і довільної скінченної кількості екземплярів кожного з елементів принципово відрізняє мультимножину від множини. Ця особливість породжує цілий ряд властивостей мультимножини як якісно нового математичного об’єкту.

Незважаючи на велику бібліографію, на сьогоднішній день теоретичні аспекти поняття мультимножин є слабо розвиненими. Дисертаційну роботу присвячено розвитку певних розділів теорії мультимножин (співвідношення між основними операціями, устрій частково впорядкованої сім’ї мультимножин, обчислюваність на мультимножинах) та її застосуванню в табличних базах даних та обчисленнях на ДНК.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, які ведуться на кафедрі теорії та технології програмування факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при виконанні фундаментальної та прикладної тем: “Розробка конструктивних математичних формалізмів для інтелектуальних систем прийняття рішень, обробки знань, еталонування мов сучасних СУБД та CASE-засобів” (№ 0106U005856, 2006–2010 рр.), “Формальні специфікації програмних систем” (№ 08U002463, 2008–2009 рр.).

Мета і завдання дисертаційного дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розвинення абстрактної теорії мультимножин для застосування отриманих результатів в інформатиці та репрезентативних предметних областях: табличних базах даних та обчисленнях на ДНК.

Із огляду на мету в роботі ставляться такі *задачі*:

– побудова та дослідження алгебри мультимножин;
– встановлення структури сім’ї мультимножин, впорядкованої за природним відношенням включення;
– розгляд обчислюваності на мультимножинах;
– застосування отриманих результатів в табличних базах даних та обчисленнях на ДНК.

Об’єктом дисертаційного дослідження є сукупності з повтореннями. *Предметом* дослідження є алгебраїчна система мультимножин, обчислюваність на мультимножинах.

У роботі використовуються наступні *методи*: теоретико-множинні, теорії решіток, теорії алгоритмів, теорії програмних алгебр композиційного типу.

Наукова новизна одержаних результатів. Досліджено властивості відомих операцій над мультимножинами: ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, закони поглинання, монотонність, аналоги законів де Моргана та подвійного заперечення.

Побудовано решітку мультимножин, яка вкладена в дві повні решітки мультимножин, при цьому друга повна решітка, отримана узагальненням поняття мультимножини (допускається нескінченна кратність елементів), використовується при заданні денотаційної семантики рекурсивних запитів SQL-подібних мов.

Вирішено проблему повноти для мультимножинної примітивної програмної алгебри, тим самим уточнено обчислюваність на мультимножинах.

Отримані результати застосовані для: уточнення таблиць з дублікатами рядків в сучасних СУБД та маніпуляцій над такими таблицями; побудови денотаційної семантики рекурсивної форми CTE-виразів (Common Table Expressions) сучасних SQL-подібних мов; уточнень обчислень на ДНК у біоінформатиці.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретико-прикладну спрямованість. Теоретичне значення роботи полягає у розвиненні розділів теорії мультимножин відносно властивостей операцій, устрою частково впорядкованої сім’ї мультимножин, обчислюваності на мультимножинах.

Отримані результати були впроваджені у навчальний процес за спеціальністю “Інформатика” на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (нормативні курси “Прикладна логіка”, “Композиційна семантика SQL-подібних мов”, “Теорія обчислень”; спеціальний курс “Вступ до реляційних баз даних”).

Практичне значення роботи полягає в застосування отриманих результатів до табличних баз даних та обчислень на ДНК.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи отримані здобувачем самостійно. Статті [38, 49, 50] написані у співавторстві з науковим керівником, якому належить постановка задачі дослідження, вибір методів дослідження та обговорення результатів. Здобувачем у статтях [4, 5, 30, 33, 48] у систематизованому вигляді подано література з теорії мультимножин станом на 2008 р., досліджено устрій частково впорядкованої сім’ї мультимножин.

Апробація результатів дослідження. Основні положення та висновки дисертаційного дослідження обговорювалися на наукових семінарах кафедри теорії та технології програмування Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також на республіканському семінарі “Програмологія та її застосування”.

Результати дисертаційного дослідження оприлюднені у доповідях і повідомленнях на Міжнародних та Всеукраїнських наукових конференціях, семінарах: VI Всеукраїнській конференції молодих науковців “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” (ІТОНТ-2008, Черкаси, Україна, 2008 р.), V Міжнародній конференції “Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development” (TAAPSD’2008, Київ, Україна, 2008 р.), Міжнародній конференції “Современные направления теоретических и прикладных исследований” (SWORD’2009, Одеса, Україна, 2009 р.), V Міжнародній науково-практичній конференції “Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте” (Коломна, Росія, 2009 р.), VI Міжнародній конференції “Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development” (TAAPSD’2009, Київ, Україна, 2009 р.), III Всеукраїнській науково-практичній конференції “Моделювання та прогнозування економічних процесів” (Київський національний технічний університет “КПІ”, Київ, Україна, 2009 р.), 9-th International Conference on Applied Mathematics (APPLIMAT-2010, Братислава, Словаччина, 2010 р.), IX Міжнародному науково-практичному семінарі “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, Україна, 2010 р.), International Conference “Dependable Systems, Services & Technologies” (DESSERT’2010, Кіровоград, Україна, 2010 р.), XIII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київський національний технічний університет “КПІ”, Київ, Україна, 2010 р.), I З’їзді “Медична та біологічна інформатика і кібернетика” (Київ, Україна, 2010 р.), VII Міжнародній конференції “Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development” (TAAPSD’2010, Київ, Україна, 2010 р.), XVI Міжнародній конференції “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU-2010, Ялта, Україна, 2010 р.), Науково-практичній конференції, присвяченій 80-річчю фізико-математичного факультету (Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, Кіровоград, Україна, 2010), X Міжнародному семінарі “Дискретная математика и ее приложения” (Московський державний університет ім. М.В. Ломоносова, Москва, Росія, 2010 р.), VII Міжнародній науково-практичній конференції з програмування (УкрПРОГ 2010, Київ, Україна, 2010 р.), Міжнародній науковій конференції “Computer Science and Engineering” (CSE’2010, Кошице, Стара Любовна, Словаччина, 2010 р.), XVI-th International Conference “Knowledge–Dialogue–Solution” (KDS 2010, Київ, Україна, 2010 р.), V-th International Conference “Modern (electronic) Learning” (MeL 2010 Київ, Україна, 2010 р.) [4, 5, 21, 23, 24, 25, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 45, 46, 47, 48, 50, 52].

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано у 22 працях. Серед них – 10 статей у наукових журналах і збірниках наукових праць, з них 5 статей опубліковано у фахових виданнях, затверджених ВАК України [22, 25, 38, 49, 50], 5 статей опубліковано у наукових фахових іноземних журналах [4, 5, 30, 33, 48]; 12 тез та праць конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (79 найменувань). Загальний обсяг дисертації становить 113 с., основний зміст викладено на 105 с. Праця містить 4 рис. та 2 табл.

РОЗДІЛ 1
СУЧАСНИЙ СТАН ТЕОРІЇ МУЛЬТИМНОЖИН

Зручною моделлю для подання та представлення об’єктів, особливістю яких є повторюваність та множинність даних, виступають мультимножини. Змістовно кажучи, мультимножини – це сукупності з повтореннями. Поняття мультимножини з’явилось відносно нещодавно, хоча в практичних задачах мультимножини використовувалися досить часто.

У 60-х роках минулого століття Д. Кнутом було поставлено питання про відсутність адекватної термінології та позначень для такої глобальної концепції як мультимножина. Вперше термін “мультимножина” (multiset, bag) був запропонований Н.Г. де Брейном (N. G. de Bruijn) у приватній кореспонденції з Д. Кнутом. У 70-х роках цей термін набув широко розповсюдження і зараз є стандартним.

Тривалий час поняття мультимножини різними науковцями інтерпретувалося по-різному. Загальновідома оглядова стаття В. Близарда (W. Blizard) [2] є спробою систематизувати усю існуючу на той час (1989 р.) інформацію. У ній представлений розгорнутий огляд розвитку теорії мультимножин, який умовно поділено на дві частини “Математика і логіка” та “Обчислювальна математика”. Автор у хронологічному порядку викладає основні ідеї та здобутки різних науковців, починаючи від розгляду поняття множини й потужності множини у Кантора та закінчуючи результатами, отриманими у цій сфері сучасними вченими (Д. Кнут (D. Knuth), Р. Ягер (R. Yager) та ін.).

У частині робіт, розглянутих В. Близардом, мультимножини представлено як математичні об’єкти. Тоді як в інших роботах мультимножини досліджуються з точки зору певного специфічного застосування. Розглядаються не тільки мультимножини зі скінченною та нескінченною кратністю елементів, а й мультимножини з від’ємною кратністю (так звані гібридні множини). У роботі розглядаються також нечіткі (fuzzy) та жорсткі (rough) мультимножини. Крім цього, розглянуто застосування мультимножин у теорії категорій та комбінаториці, наведено філософські аспекти теорії мультимножин.

У більшості робіт означення мультимножини формулюється на платформі класичної теорії множин або через числення предикатів першого порядку.

Проте деякі роботи розвивають теорію видів (theory of sorts), яка радикально відрізняється від класичної математики своєю трирівноціною (tripatitous) природою (об’єкти можуть бути однакові, різні або двоїсті).

Існує більш сучасна (2007 р.) оглядова робота [15], яка відштовхується від робіт В. Близарда. У статті нараховується більше 80 джерел стосовно теорії мультимножин та її застосування. У цій роботі розглядаються методи представлення мультимножин, визначаються операції об’єднання, перетину та суми мультимножин та наводяться деякі їхні властивості.

Друга частина роботи [15] присвячена саме використанню мультимножин у різних сферах (здебільшого у комп’ютерних науках).

Одним із найбільш природних є застосування мультимножин у табличних базах даних; цьому питанню присвячено багато робіт. Проте мультимножини використовуються не лише в математиці та комп’ютерних науках, а й в багатьох інших галузях.

Усю бібліографію, присвячену мультимножинам, можна умовно розділити на такі категорії:

- роботи, присвячені абстрактній теорії мультимножин,
- оглядові роботи,
- роботи по використанню мультимножин.

Крім цього, виокремимо роботи, присвячені застосуванню теорії мультимножин в базах даних. Отже, маємо чотири розділи, які представлені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Бібліографія по теорії та застосуванню мультимножин

№ п/п	Рік	Автор(и)	Головні результати	Посилання
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ МУЛЬТИМНОЖИН				
1.	1980	Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део	Наводиться змістовне означення мультимножини. Зазначається, що мультимножини можна розглядати як послідовності пар (кожна пара складається з елементу та його кратності). Тому, як і для послідовностей, найкращий метод представлення мультимножин суттєво залежить від операцій, які виконуються над ними	[74]
2.	1991	J. Albert	Наводяться формальні означення мультимножини та операцій над ними; розглядаються алгебраїчні властивості мультимножин	[1]
3.	2000	Д. Кнут	Наводиться змістовне означення поняття мультимножини; визначаються операції об’єднання, перетину та суми мультимножин	[59]
4.	2001	A. Syropoulos	Робота складається із декількох частин. Підсумовується усе те, що пов’язано з теорією мультимножин станом на 2001 р. Наводяться означення мультимножини, визначаються операції додавання, об’єднання та перетину мультимножин, вводяться означення потужності та	[17]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			відношення включення мультимножин. Розглядаються гібридні множини, нечіткі та частково впорядковані мультимножини, а також наводиться категоріальна модель мультимножин	
5.	2002, 2003	А.Б. Петровський	У першій монографії вводяться основні означення теорії мультимножин: означення мультимножини, характеристичної функції, операцій над мультимножинами. Крім цього, розглядаються властивості основних операцій над мультимножинами, методи графічного представлення мультимножин та наводиться короткий огляд застосування мультимножин у різних галузях. У другій монографії розглядаються метричні простори множин та мультимножин, описуються нові види метрик	[69, 70]
ОГЛЯДОВІ СТАТТІ				
6.	1989	Wayne D. Blizard	Наводиться розгорнутий огляд теорії мультимножин станом на 1989 р. Робота складається із двох частин: теорія мультимножин та її застосування. У першій частині роботи автор наводить різноманітні означення поняття мультимножини	[2]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			різних авторів, починаючи від Кантора та його означення поняття множини. У другій частині роботи мультимножини розглядаються, насамперед, як об'єкти певних практичних задач	
7.	2007	D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna, J.N. Singh	У роботі розглядаються різноманітні представлення мультимножин (у мультиплікативній, лінійній формах, у вигляді послідовності, як сім'я множин, у вигляді числової послідовності). Визначаються операції над мультимножинами та розглядаються деякі їхні властивості. Також наводиться короткий огляд застосувань мультимножини в математиці, комп'ютерних науках та інших областях	[15]
МУЛЬТИМНОЖИНИ В ТАБЛИЧНИХ БАЗАХ ДАНИХ				
8.	1993, 1997	L. Libkin, L. Wong	У першій роботі розглянуто теоретичні питання, що стосуються реляційних баз даних, основою яких виступають мультимножини. Побудовано мову запитів для мультимножин BQL (Bag Query Language) та досліджено зв'язок між отриманою мовою і, так званою, вкладеною реляційною алгеброю (nested	[10, 11]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			relation algebra). Другу роботу присвячено виразній силі мови запитів для мультимножин, а також використанню деяких конструкцій для мультимножин, множин та списків	
9.	1999	Д.Б. Буй, С.А. Поляков	У роботі задано композиційну семантику таблиць із дублікатами рядків та таблиць “впорядкованих” конструкцією ORDER BY	[31]
10.	2001	В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков	Монографію присвячено табличним алгебрам та SQL-подібним мовам. Наводяться формальні означення мультимножини, характеристичної функції мультимножини, а також визначаються агрегатні функції та операції над мультимножинами: об’єднання, перетину, різниці, декартового з’єднання, фільтрації, повного образу	[72]
11.	2001	G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella	Статтю присвячено розширенню можливостей баз даних за рахунок використання мультимножин. Відмічається, що сучасні комерційні реляційні бази даних дають змогу здійснювати мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо бази даних основані на формальній множинно-орієнтованій моделі	[9]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
12.	2003	С.Д. Кузнецов	Розглядається існування такого структурного типу як мультимножина (BAG) в декларативній мові обмежень OCL. Цей тип є різновидом колекцій і має відповідні операції	[60]
13.	2003	Стандарт SQL:2003	Починаючи зі стандарту SQL:2003 у мову SQL було введено конструктор типу `MULTISET`. Значення мультимножин задаються шляхом використання спеціальної конструкції: `multiset value constructor`. Крім цього, для мультимножин вводяться операції об'єднання, перетину та різниці (`multiset union`, `multiset intersect`, `multiset except`), а також нові агрегатні функції (`collect`, `fusion`, `intersect`)	[16, 68]
14.	2004	K.A. Ross, J. Stoyanovich	Симетричний зв'язок між *k*-арними сутностями бази даних представляється як мультимножина потужності *k*, де *k* – натуральне число. У статті обґрунтовується необхідність підтримки базами даних мультимножин, обмежених за потужністю (cardinality-bounded multisets), які природнім чином виникають при вирішенні реальних задач. Пропонуються методи реалізації. Описано	[14]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			синтаксис розширення SQL, що дає змогу формулювати запити над такими симетричними зв'язками	
15.	2004	Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом	Наводяться означення мультимножини в термінах табличних баз даних. Також над мультимножинами вводяться основні (об'єднання, перетин, різниця, проекція, селекція, декартовий добуток) та додаткові (агрегування, сортування, групування) операції	[55]
ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ МУЛЬТИМНОЖИН				
16.	1985	Х. Барендрегт	Мультимножини вводяться при розгляді сильно еквівалентних рекурсій в теорії λ-числення. Основами таких мультимножин виступають скінченні множини натуральних чисел. Для мультимножин вводяться ординали	[18]
17.	1992	Д. Кнут	У роботі визначається поняття мультимови як мультимножини рядків. Будується контекстно-вільна мультимова	[8]
18.	1998	J.W. Lloyd	У роботі запропоновано новий спосіб підтримки мультимножин у декларативній мові програмування Escher. Вводиться стандартне означення мультимножини, а потім мультимножина визначається відповідними	[12, 13]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			засобами мови. Реалізовано операції додавання, об’єднання, перетину та різниці над мультимножинами, а також допоміжні функції для роботи з ними	
19.	2000, 2005	В.А. Башкин, И.А. Ломазова	Мультимножини застосовуються для визначення основних понять мереж Петрі	[19, 75]
20.	2004	Г.В. Сухольский	Мультимножини використовуються у психології	[79]
21.	2005	C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu	Статтю присвячено представленню та кодуванню інформації в термінах теорії мультимножин. Інформаційний ресурс розглядається як такий, що породжує мультимножинні повідомлення. Досліджується норма ентропії мультимножинного інформаційного ресурсу	[3]
22.	2005	Г.Г. Малинецкий, С.А. Науменко	Мультимножини використовуються у такій новій області знань як обчислення на ДНК – розділі так званих молекулярних обчислень (нового міждисциплінарного напряму досліджень на межі молекулярної біології і комп’ютерних наук)	[63]

Продовж. табл. 1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
23.	2006	О.А. Славин	Мультимножини застосовуються у задачах розпізнавання символів. Різноманітні, з погляду зображення, типи символів можуть містити декілька графем, тобто типів зображення, що відповідають одному символу. Алфавіт навчання як множина класів є носієм мультимножини всіх допустимих графем. Кратність елементу цієї мультимножини є кількість графем, нерозрізнених з погляду алфавіту навчання	[78]

Найбільш важливі, на наш погляд, роботи прокоментуємо детальніше.

У статті [17] (№4 у табл. 1.1) підсумовується фактологія теорії мультимножин. Стаття складається із шести розділів. Перший розділ – вступний, другий – присвячено означенню мультимножин та операцій над ними, третій розділ описує гібридні множини, у четвертому розділі мультимножини розглядаються у теорії категорій, розділи п’ять та шість присвячено відповідно нечітким та частково впорядкованим мультимножинам.

Автор визначає мультимножину, допускаючи, що в заданій множині елементи можуть повторюватися скінченне число разів. Далі наводяться три методи формального означення мультимножини: метод списку (мультимножина визначається шляхом задання усіх її елементів), метод правила (*the rule method*, мультимножина визначається певною властивістю, яка притаманна її елементам) та метод характеристичної функції (мультимножина визначається характеристичною функцією).

Автор розрізняє поняття *мультимножини* (мультимножини з розрізненими елементами, що повторюються) та *власної (real) мультимножини* (мультимножини з нерозрізненими елементами, що повторюються) та наводить відповідні формальні означення.

У другому розділі також подано означення опорної множини та підмультимножини. Наведено означення потужності мультимножини, операцій над мультимножинами (додавання, різниці, об’єднання та перетину) та деякі властивості цих операцій. Крім цього, вводиться досить специфічна операція, яка не має аналогу на множинах – бінарна операція мультиперетину, одним аргументом якої виступає мультимножина, а іншим – множина.

Наступний розділ статті присвячено гібридним множинам – сукупностям, кратність елементів яких може бути як додатною або рівною 0, так і від’ємною. Автор наводить формальне означення гібридної множини, визначає операції об’єднання, перетину та суми над ними. Також наведено означення підмножини гібридної множини.

У четвертому розділі розглядається категорійна модель мультимножин. Наводяться означення двох категорій усіх можливих мультимножин *MSet* та *Bags*.

У п’ятому розділі статті описуються нечіткі мультимножини. Автор надає формальне означення, представлення нечіткої мультимножини у вигляді рангової послідовності. Крім цього, визначаються операції об’єднання та перетину нечітких мультимножин, наводяться означення підмультимножини нечіткої мультимножини, рівності нечітких мультимножин та операції α-обмеження нечіткої мультимножини.

Останній розділ присвячено частково впорядкованим мультимножинам (*pomset*). Наведено визначення частково впорядкованої мультимножини та розглянуто три основні операції над ними: спеціальний перетин (concurrence), спеціальне з’єднання (concatenation), так званий ортоперетин (orthoconcurrence).

У [3] (№21 у табл. 1.1) розглянуто випадок представлення інформації в термінах мультимножин та кодування інформації за допомогою мультимножин. Спочатку у статті подається короткий огляд теорії інформації Шеннона. Далі дискретний інформаційний ресурс розглядається як такий, що продукує мультимножинні повідомлення (тобто повідомлення з мультимножиною символів). Також досліджується норма ентропії мультимножини інформаційного ресурсу. Потім розглядається кодування мультимножин, яке включає кодування рядка та кодування довжини, і для кожного кодування визначається пропускна здатність каналу.

У [8] (№17 у табл. 1.1) Д. Кнут застосовує мультимножини в контекстно-вільних мультимовах. У статті наводиться означення мультимножини, означення деяких операцій над мультимножинами (об’єднання, перетин, додавання, множення, тощо). Визначається мультимова як мультимножина слів (тоді як мова – це множина слів) та контекстно-вільна мультимова. Д. Кнут зазначає, що заміна множини слів на мультимножину слів більш природна з точки зору програмування.

У роботах [12, 13] (№18 у табл. 1.1) представлено новий спосіб підтримки мультимножин у декларативній мові програмування. Спочатку наводиться стандартне означення мультимножини, потім мультимножина визначається відповідними засобами мови. Наводиться реалізація операцій над мультимножинами: додавання, різниці, об’єднання, перетину. Також наведено реалізацію допоміжних функцій: функція, що визначає чи є заданий елемент членом мультимножини; функція конвертування списку у мультимножину; функція визначення суми усіх елементів мультимножини (визначення потужності); функція, що визначає чи є задана мультимножина підмультимножиною мультимножини; функція, що визначає чи рівні дві мультимножини; функція видалення дублікатів; функція видалення елементів мультимножини; функція стандартизації (застосовується для представлення мультимножини в стандартному вигляді). Усі ідеї реалізовано на мові програмування Escher. Статтю доповнено прикладами.

Робота [72] (№10 у табл. 1.1) належить до розділу “Мультимножини в табличних базах даних”, проте її також можна віднести й до розділу “Абстрактна теорія мультимножин”, адже у роботі наводяться означення, що відповідають безпосередньо теорії мультимножин. Автори дають формальні означення мультимножини та її характеристичної функції. Вводиться поняття 1-мультимножини – мультимножина, область значень якої є одноелементна множина $\{1\}$. Визначаються операції об’єднання, перетину та різниці над мультимножинами в термінах характеристичних функцій. Автори розрізняють операції $\bigcup_{All}$, $\bigcap_{All}$, $\setminus_{All}$ та операції $\bigcup_1$, $\bigcap_1$, $\setminus_1$. Останні будують 1-мультимножини, основи яких отримуються відповідно теоретико-множинними операціями об’єднання, перетину та різниці основ мультимножин-аргументів.

Також у роботі вводиться операція $Dist(\alpha)$, що будує 1-мультимножину, основа якої збігається з основою вихідної мультимножини, розглядається операція декартового з’єднання двох мультимножин та вводиться аналог повного образу для мультимножин.

У роботі [31] (№9 у табл. 1.1) розглядаються функції над таблицями (таблиці розуміються як мультимножини, основами яких є множини односхемних рядків): функції об’єднання, перетину, різниці (вводяться як обмеження однойменних операцій над мультимножинами), функції декартового з’єднання таблиць та вилучення дублікатів.

Другий розділ статті присвячено розгляду таблиць як мультимножин рядків. Спочатку вводиться означення рядку (як кортежу та як іменної множини) та розглядаються основні функції на рядках: роз’іменування, іменування, об’єднання та доступу до елемента рядка за номером. Далі таблиця розглядається як скінченна мультимножина рядків однієї схеми. Описується загальна процедура розповсюдження теоретико-множинних операцій над таблицями, що складаються із кортежів, до операцій над таблицями, які складаються з рядків. Встановлюється відповідність між рядками та кортежами та між таблицями рядків та таблицями кортежів.

Останній розділ присвячено уточненню “впорядкованих” таблиць, що полягає у розгляді таблиці як мультимножини з бінарним відношенням, яке індукується фразою ORDER BY. Тобто, таблиці уточнюються як моделі, носії яких є таблиці в попередньому розумінні, а сигнатури містять єдиний предикатний символ.

Робота [9] (№11 у табл. 1.1) присвячена питанню розширення можливостей баз даних (БД) за рахунок використання мультимножин. Автори відмічають, що сучасні комерційні реляційні системи БД дозволяють проводити мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо вони основані на формальній множинно-орієнтованій моделі. У статті наводяться означення операцій проекції, селекції, добутку, з’єднання (natural и theta-), перейменування таблиць як мультимножин рядків, а також означення аналогів теоретико-множинних операцій (об’єднання, перетину, різниці).

Наведемо означення основних операцій.

Операція проекції таблиці будує мультимножину рядків:

$$\pi_Y(m) \overset{def}{=} \left[t_{(Y)} \middle| \; t \in m \right],$$

де m – мультимножина рядків схеми X (X – множина атрибутів), причому $Y \subseteq X$.

Тут і далі використовуються позначення із [9]: зокрема, $t_{(Y)}$ – обмеження кортежу t за множиною атрибутів Y, запис $t \in m$ слід розуміти як належність кортежу t основі мультимножини m; $Occ(t, m)$ – кількість дублікатів (екземплярів) кортежу t в мультимножині m.

На відміну від операції проекції множини рядків, дублікати рядків, які з’явилися після виконання операції, не вилучаються. Кількість дублікатів кожного кортежу визначається наступною формулою:

$$Occ(t, \pi_Y(m)) \overset{def}{=} \sum_{t' \in m, t'_{(Y)} = t} Occ(t', m).$$

Визначимо операцію селекції мультимножин. Операція селекції на мультимножині рядків m просто застосовує предикат селекції до кожного кортежу та повертає як результат такі кортежі $t \in m$, на яких предикат приймає значення істини:

$$\delta_\rho(m) \overset{def}{=} [t \in m \mid \rho(t)].$$

У залежності від значення предикату на кортежі t усі дублікати цього кортежу або входять до результуючої таблиці, або ні:

$$Occ(t, \delta_\rho(m)) \overset{def}{=} \begin{cases} Occ(t, m),\ якщо\ \rho(t), \\ 0,\ інакше. \end{cases}.$$

Розглянемо операцію декартова з'єднання мультимножин. Нехай є дві мультимножини m_1 і m_2, що визначені на схемах X і Y відповідно, причому $X \bigcap Y = \varnothing$. Добуток $m_1 \otimes m_2$ – це мультимножина рядків схеми $X \bigcup Y$, що складається із усіх кортежів, які утворилися в результаті конкатенації кортежів з m_1 і m_2:

$$m_1 \otimes m_2 \overset{def}{=} \left[t\ над\ X \bigcup Y \;\middle|\; \exists t_1 \exists t_2 \begin{pmatrix} t_1 \in m_1, t_2 \in m_2, \\ t_{(X)} = t_1, t_{(Y)} = t_2 \end{pmatrix} \right].$$

Змістовно кажучи, кожний кортеж m_1 з'єднується з кожним кортежем m_2, незалежно від того – дублікат це чи ні. Кількість дублікатів знаходиться так:

$$Occ\,(t_1 \bigcup t_2, m_1 \otimes m_2) \overset{def}{=} Occ\,(t_1, m_1) \cdot Occ\,(t_2, m_2).$$

У першому розділі в систематизованому вигляді подано огляд існуючої літератури з теорії мультимножин та її застосування.

Усі розглянуті роботи умовно поділено на чотири групи: абстрактна теорія мультимножин, оглядові роботи з мультимножин, застосування мультимножин у табличних базах даних та інші застосування мультимножин.

Бібліографія кожної групи зведена у табл. 1.1 у хронологічному порядку. До кожної роботи наводиться перелік головних результатів.

Основні роботи розглянуті більш детально.

Аналіз наведеної літератури дозволяє зробити наступні висновки:

1) поняття мультимножини є природнім і застосовується в різноманітних предметних областях;
2) теорія мультимножин має фрагментарний характер, що не дає підстави стверджувати про існування систематичної розвиненої абстрактної теорії мультимножин;
3) не існує єдиного методологічного підходу до застосування теорії мультимножин.

РОЗДІЛ 2
ОСНОВИ ТЕОРІЇ МУЛЬТИМНОЖИН

2.1. Основні означення

Мультимножина – це сукупність елементів довільної природи, що можуть дублюватися (повторюватися).

Наведемо формальне означення. Для цього позначимо $N \overset{def}{=} \{0,1,2,...\}$ – множина натуральних чисел з нулем і $N^+ \overset{def}{=} \{1,2,...\}$ – множина натуральних чисел без нуля.

Нехай U – деяка множина (в класичному канторівському розумінні). Тоді *мультимножина* α *з основою* U – це функція вигляду: $\alpha : U \to N^+$. Основу мультимножини α будемо позначати як U_α.

Мультимножина називається *порожньою* і позначається як $\varnothing_m$, якщо її основа – порожня множина.

Мультимножини, областю значень яких є одноелементна множина виду $\{1\}$, назвемо *1-мультимножинами*. Очевидно, що для непорожніх 1-мультимножин число дублікатів елементів основи рівне 1, тобто такі мультимножини є аналогами звичайних множин.

Мультимножини вигляду $\left\{ a^m \right\} \overset{def}{=} \left\{ \langle a, m \rangle \right\}$, потужність основи яких рівна 1, будемо називати *мультимножинними сінглтонами*.

Мультимножина α називається *скінченною*, якщо вона скінченна як функція, тобто складається зі скінченної множини пар.

Позначати скінченні мультимножини будемо у вигляді множини впорядкованих пар: $\left\{ \langle a_1, n_1 \rangle, ..., \langle a_k, n_k \rangle \right\}$, де пара $\langle a, n \rangle$ означає, що елемент a має $n \geq 1$ дублікатів у мультимножині α.

Отже, нехай маленькі латинські літери $a_1, a_2, ...$ – це елементи основи мультимножин; пари вигляду $\langle a_1, n_1 \rangle$, $\langle a_2, n_2 \rangle, ...$ – елементи мультимножин; маленькі грецькі літери α, $\beta, ...$ – самі мультимножини.

Зафіксуємо D – універсум елементів основ мультимножин; тоді булеан $P(D)$ є універсумом основ мультимножин.

Нехай задана мультимножина α з основою $U = dom\,\alpha$. Зазначимо, що $dom\,\alpha$ – область означеності мультимножини як функції.

Характеристичною функцією мультимножини α називається функція вигляду $\chi_\alpha : D \to N$, значення якої задається наступною кусковою схемою:

$$\chi_\alpha(d) = \begin{cases} \alpha(d), \text{ якщо } d \in dom\,\alpha, \\ 0, \text{ інакше}; \end{cases}$$

для усіх $d \in D$ [72].

Очевидно, що характеристична функція 1-мультимножини приймає значення 1, якщо елемент належить основі мультимножини, і 0 – в протилежному випадку. Отже, області значень характеристичних функцій 1-мультимножин є підмножини множини $\{0, 1\}$. Також очевидно, що характеристичною функцією порожньої мультимножини є константна функція, яка всюди дорівнює 0.

Зауважимо, що характеристична функція називає функцією кратності згідно термінології монографії [69].

2.1.1. Характеристики мультимножини

Відповідно до [69] визначимо основні характеристики мультимножин.

Потужністю скінченної мультимножини $\alpha = \{\langle a_1, n_1 \rangle, ..., \langle a_k, n_k \rangle\}$, де $a_1, ..., a_k$ – попарно різні елементи основи, називається сума дублікатів усіх елементів основи $card(\alpha) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{k} n_i$. При цьому потужність порожньої мультимножини буде дорівнювати 0.

Розмірністю скінченної мультимножини $\alpha = \{\langle a_1, n_1\rangle, ..., \langle a_k, n_k\rangle\}$, де $a_1, ..., a_k$ – попарно різні елементи основи, називається потужність її основи $dim(\alpha) = card(U)$. Розмірність порожньої мультимножини буде дорівнювати 0.

Піковим значенням скінченної мультимножини $\alpha = \{\langle a_1, n_1\rangle, ..., \langle a_k, n_k\rangle\}$, де $a_1, ..., a_k$ – попарно різні елементи основи, називається найбільше значення цієї функції (яке завжди існує, оскільки область значень скінченної числової функції також скінченна) $hgt\,\alpha = \max(range(\alpha))$. Пікове значення порожньої мультимножини дорівнює 0.

Піковим елементом скінченної мультимножини $\alpha = \{\langle a_1, n_1\rangle, ..., \langle a_k, n_k\rangle\}$ називається елемент основи, на якому мультимножина досягає свого пікового значення; в попередніх позначеннях $p(\alpha) = a_j$, $hgt\,\alpha = \max(n_1, n_2, ..., n_k) = n_j$.

Зауважимо, що мультимножина може мати декілька пікових елементів. Очевидно, що множина усіх пікових елементів це повний прообраз пікового значення.

2.1.2. Рівність мультимножин

Мультимножини α і β називаються *рівними*, якщо вони рівні як функції.

Твердження 2.1. Із рівності характеристичних функцій мультимножин випливає рівність цих мультимножин і навпаки:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall d \big(d \in D \Rightarrow \chi_\alpha(d) = \chi_\beta(d)\big).\square$$

Доведення безпосередньо випливає із означень.□

2.1.3. Включення мультимножин

Введемо поняття включення мультимножин. *Мультимножина* β *включається у мультимножину* α ($\beta \preceq \alpha$), якщо:

$$\beta \preceq \alpha \overset{def}{\Leftrightarrow} U_\beta \subseteq U_\alpha \mathbin{\&} \forall d \big(d \in U_\beta \Rightarrow \beta(d) \leq \alpha(d)\big).$$

Якщо $\beta \preceq \alpha$, то мультимножина β називається *підмультимножиною* мультимножини α, а мультимножина α – *надмультимножиною* мультимножини β.

Очевидно, що порожня мультимножина є підмультимножиною будь-якої мультимножини ($\varnothing_m \preceq \alpha,\ \forall \alpha$). Також, очевидно, що будь-яка мультимножина є своєю ж підмультимножиною ($\alpha \preceq \alpha,\ \forall \alpha$).

Твердження 2.2. Виконується еквівалентність:

$$\beta \preceq \alpha \Leftrightarrow \forall d \big(d \in D \Rightarrow \chi_\beta(d) \leq \chi_\alpha(d)\big).\square$$

Доведення проводиться безпосередньо.□

З означення випливає, що коли $\beta \preceq \alpha$, то для основ мультимножин виконується включення $U_\beta \subseteq U_\alpha$. З того, що $U_\beta \subseteq U_\alpha$ слідує, що розмірність мультимножини β не більше розмірності мультимножини α. Не важко перевірити, що потужність та пікове значення мультимножини β не перевищують потужності та пікового значення мультимножини α (звісно, за умови існування пікових значень). Пікові елементи можуть відрізняться.

Мультимножина β *строго включається у мультимножину* α ($\beta \prec \alpha$), якщо: $\beta \prec \alpha \overset{def}{\Leftrightarrow} \beta \preceq \alpha \mathbin{\&} \beta \neq \alpha$. В такому випадку мультимножина β називається *власною підмультимножиною* мультимножини α.

Твердження 2.3. Якщо мультимножина β строго включається у мультимножину α, то існує хоча б один елемент $d \in D$ для якого виконується нерівність $\chi_\beta(d) < \chi_\alpha(d)$, тобто маємо імплікацію:

$$\beta \prec \alpha \Rightarrow \exists d\left(d \in D \,\&\, \chi_\beta(d) < \chi_\alpha(d)\right).\square$$

Доведення проводиться безпосередньо від супротивного з використанням попередніх тверджень 2.1–2.2.□

Очевидно, що коли $\beta \prec \alpha$, то основа мультимножини β є підмножиною основи мультимножини α: $U_\beta \subseteq U_\alpha$. Аналогічним чином, як і в попередньому випадку, розмірність, потужність та пікове значення мультимножини β не перевищують розмірності, потужності та пікового значення мультимножини α відповідно. Пікові елементи можуть відрізнятся.

Безпосередньо з означення випливає, що бінарне відношення включення мультимножин є відношенням часткового порядку, оскільки виконуються властивості: рефлексивності ($\alpha \preceq \alpha$), транзитивності ($\alpha \preceq \beta \,\&\, \beta \preceq \gamma \Rightarrow \alpha \preceq \gamma$), антисиметричності ($\alpha \preceq \beta \,\&\, \beta \preceq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$).

2.1.4. Особливі мультимножини

До особливих мультимножин належить порожня мультимножина (нагадаймо, що її основа порожня множина); потужність, розмірність та пікове значення порожньої мультимножини дорівнюють 0. Порожня мультимножина є підмультимножиною будь-якої мультимножини.

Розглянемо мультимножину, що приймає постійне значення на усій своїй основі. Таку мультимножину будемо називати *постійною*: $\overline{h}_U : U \to \{h\}$.

Неважко перевірити, що потужність та розмірність такої мультимножини пов'язані рівністю $card(\overline{h}_U) = h \cdot dim(\overline{h}_U)$, де h – значення, що приймає мультимножина на усій своїй основі. Очевидно, що пікове значення постійної мультимножини рівне *h*, а піковим елементом є будь-який елемент основи.

Частковим випадком постійних мультимножин є 1-мультимножина, областю значень якої є одноелементна множина вигляду $\{1\}$.

2.2. Операції над мультимножинами

Між мультимножинами та їх характеристичними функціями існує взаємно однозначна відповідність, тому операції над мультимножинами зручно визначати у термінах їхніх характеристичних функцій.

Будемо окремо розглядати операції, які будують 1-мультимножини; їх будемо позначати особливим чином, вводячи нижній індекс 1. Для операцій, які будуть мультимножини загального вигляду будемо використовувати нижній індекс All.

2.2.1. Операція об'єднання

Операція $\bigcup_{All}$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$.

Твердження 2.4. Основа мультимножини $\alpha \bigcup_{All} \beta$ дорівнює об'єднанню основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \cup_{All} \beta} = U_\alpha \bigcup U_\beta$.□

Доведення. ■ Покажемо спочатку, що $U_{\alpha \cup_{All} \beta} \subseteq U_\alpha \bigcup U_\beta$. Нехай $d \in U_{\alpha \cup_{All} \beta}$. Тоді $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) > 0$. Якщо $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) = \chi_\alpha(d)$, то $\chi_\alpha(d) > 0$ і $d \in U_\alpha$. Якщо $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) = \chi_\beta(d)$, то $\chi_\beta(d) > 0$ і $d \in U_\beta$. Якщо $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) = \chi_\alpha(d) = \chi_\beta(d)$, то $\chi_\alpha(d) > 0$ та $\chi_\beta(d) > 0$, і тоді $d \in U_\alpha$ та $d \in U_\beta$ одночасно. Залишається використати означення стандартної теоретико-множинної операції $\bigcup$.▪

■ Тепер покажемо, що $U_\alpha \bigcup U_\beta \subseteq U_{\alpha \cup_{All} \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \bigcup U_\beta$. Тоді, за означенням операції $\bigcup$, можливі наступні випадки:

1) $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$;

2) $d \notin U_\alpha$ і $d \in U_\beta$;

3) $d \in U_\alpha$ і $d \in U_\beta$.

В усіх трьох видках $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) > 0$. А значить, $d \in U_{\alpha \bigcup_{All} \beta}$.▪□

Операція $\bigcup_1$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $sg(\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)))$ або в еквівалентній формі $\max(sg(\chi_\alpha(d)), sg(\chi_\beta(d)))$, де операція sg розуміється традиційно (див., наприклад, [65, 66]):

$$sg(x) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } x > 0, \\ 0, \textit{якщо } x = 0; \end{cases}$$

де $x \in N$.

Твердження 2.5. Основа мультимножини $\alpha \bigcup_1 \beta$ дорівнює об'єднанню основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \bigcup_1 \beta} = U_\alpha \bigcup U_\beta$.□

Доведення. Для доведення необхідно використати доведення попереднього твердження та означення операції *sg*.□

2.2.2. Операція перетину

Операція $\bigcap_{All}$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$.

Твердження 2.6. Основа мультимножини $\alpha \bigcap_{All} \beta$ дорівнює перетину основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \bigcap_{All} \beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$.□

Доведення. ■ Покажемо спочатку, що $U_{\alpha \bigcap_{All} \beta} \subseteq U_\alpha \bigcap U_\beta$. Нехай $d \in U_{\alpha \bigcap_{All} \beta}$, тоді $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) > 0$. Значить, $\chi_\alpha(d) > 0$, $\chi_\beta(d) > 0$ та $d \in U_\alpha$, $d \in U_\beta$. Отже, за означенням теоретико-множинної операції перетину, $d \in U_\alpha \bigcap U_\beta$.▪

■ Тепер покажемо навпаки, що $U_\alpha \bigcap U_\beta \subseteq U_{\alpha \bigcap_{All} \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \bigcap U_\beta$. Значить, $d \in U_\alpha$ та $d \in U_\beta$, і значення характеристичних функцій відповідних мультимножин на аргументі d не дорівнює 0, тобто: $\chi_\alpha(d) > 0$ і $\chi_\beta(d) > 0$. Тоді $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) > 0$, і, значить, $d \in U_{\alpha \bigcap_{All} \beta}$.▪□

Операція $\bigcap_1$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $sg(\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)))$ або в еквівалентній формі $\min(sg(\chi_\alpha(d)), sg(\chi_\beta(d)))$.

Твердження 2.7. Основа мультимножини $\alpha \bigcap_1 \beta$ дорівнює перетину основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \bigcap_1 \beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$.□

Доведення. Для доведення необхідно використати доведення твердження 2.6 та означення операції sg.□

2.2.3. Операція додавання

Операція $+_{All}$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d)$.

Твердження 2.8. Основа мультимножини $\alpha +_{All} \beta$ дорівнює об'єднанню основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha +_{All} \beta} = U_\alpha \bigcup U_\beta$.□

Доведення. ■ Покажемо спочатку, що $U_{\alpha +_{All} \beta} \subseteq U_\alpha \bigcup U_\beta$. Нехай $d \in U_{\alpha +_{All} \beta}$. Тоді $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d) > 0$. Якщо $\chi_\alpha(d) > 0$, тоді $d \in U_\alpha$. Якщо ж $\chi_\beta(d) > 0$, тоді $d \in U_\beta$. Якщо $\chi_\alpha(d) > 0$ та $\chi_\beta(d) > 0$, тоді $d \in U_\alpha$ та $d \in U_\beta$ одночасно. Залишається лише використати означення стандартної теоретико-множинної операції $\bigcup$.▪

■ Покажемо, що $U_\alpha \bigcup U_\beta \subseteq U_{\alpha +_{All} \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \bigcup U_\beta$. Тоді, за означенням операції $\bigcup$, можливі наступні випадки:

1) $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$, і, значить, $\chi_\alpha(d) > 0$ і, відповідно, $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d) > 0$;

2) $d \notin U_\alpha$ і $d \in U_\beta$, і, значить, $\chi_\beta(d) > 0$ і, відповідно, $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d) > 0$;

3) $d \in U_\alpha$ і $d \in U_\beta$, і, значить, $\chi_\alpha(d) > 0$ та $\chi_\beta(d) > 0$, отже $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d) > 0$.

Таким чином, в усіх трьох випадках $\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d) > 0$, отже $d \in U_{\alpha +_{All} \beta}$.▪□

Операція додавання $+_1$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $sg(\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d))$.

Твердження 2.9. Основа мультимножини $\alpha +_1 \beta$ дорівнює об’єднанню основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha +_1 \beta} = U_\alpha \bigcup U_\beta$.□

Доведення. Для доведення необхідно використати доведення попереднього твердження та означення операції sg.□

Зауважимо, що операції додавання $+_1$ та об’єднання $\bigcup_1$ співпадають, оскільки виконується наступна рівність $sg(\chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d)) = sg(\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)))$, яка перевіряється безпосередньо.

2.2.4. Операція різниці

Операція $\backslash_{All}$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d)$, де операція зрізаної різниці $\dot{-}$ визначається традиційно (див., наприклад, [58, 65, 66]):

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ якщо } x \geq y, \\ 0, \text{ якщо } x < y; \end{cases}$$

де $x, y \in N$.

Для визначення основи мультимножини $\alpha \setminus_{All} \beta$ введемо наступну допоміжну множину $\gamma(U_\alpha, U_\beta) \overset{def}{=} \{d \mid d \in U_\alpha \bigcap U_\beta \; \& \; \chi_\alpha(d) > \chi_\beta(d)\}$.

Твердження 2.10. Основа мультимножини $\alpha \setminus_{All} \beta$ задається виразом $(U_\alpha \setminus U_\beta) \bigcup \gamma(U_\alpha, U_\beta)$.□

Доведення. ■ Покажемо спочатку, що $U_{\alpha \setminus_{All} \beta} \subseteq (U_\alpha \setminus U_\beta) \bigcup \gamma(U_\alpha, U_\beta)$. Нехай $d \in U_{\alpha \setminus_{All} \beta}$. Це означає, що або $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$, або $d \in U_\alpha$ та $d \in U_\beta$, але $\chi_\alpha(d) > \chi_\beta(d)$. В першому випадку, $d \in U_\alpha \setminus U_\beta$, у другому випадку $d \in \gamma(U_\alpha, U_\beta)$. Отже включення виконується.▪

■ Тепер покажемо, що $(U_\alpha \setminus U_\beta) \bigcup \gamma(U_\alpha, U_\beta) \subseteq U_{\alpha \setminus_{All} \beta}$. Нехай $d \in (U_\alpha \setminus U_\beta) \bigcup \gamma(U_\alpha, U_\beta)$. Значить $d \in U_\alpha \setminus U_\beta$ або $d \in \gamma(U_\alpha, U_\beta)$. Якщо $d \in U_\alpha \setminus U_\beta$, то $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$, таким чином, $\chi_\alpha(d) > 0$, $\chi_\beta(d) = 0$, отже $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d) > 0$ і $d \in U_{\alpha \setminus_{All} \beta}$. Якщо $d \in \gamma(U_\alpha, U_\beta)$, тоді $d \in U_\alpha$, $d \in U_\beta$ і $\chi_\alpha(d) > \chi_\beta(d)$, отже $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d) > 0$ і $d \in U_{\alpha \setminus_{All} \beta}$.▪□

Операція $\setminus_1$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $sg(\chi_\alpha(d)) \dot{-} sg(\chi_\beta(d))$.

Твердження 2.11. Основа мультимножина $\alpha \setminus_1 \beta$ дорівнює різниці основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \setminus_1 \beta} = U_\alpha \setminus U_\beta$.□

Доведення. ■ Спочатку покажемо, що $U_{\alpha \setminus_1 \beta} \subseteq U_\alpha \setminus U_\beta$. Нехай $d \in U_{\alpha \setminus_1 \beta}$. Тоді $sg(\chi_\alpha(d)) \dot{-} sg(\chi_\beta(d)) > 0$, і, значить, $sg(\chi_\alpha(d)) \dot{-} sg(\chi_\beta(d)) = 1$. Це можливо тільки в тому випадку, коли $sg(\chi_\alpha(d)) = 1$, а $sg(\chi_\beta(d)) = 0$. Таким чином, $\chi_\alpha(d) \geq 1$, а $\chi_\beta(d) = 0$. Отже, $d \in U_\alpha$, $d \notin U_\beta$ і $d \in U_\alpha \setminus U_\beta$.▪

■ Покажемо тепер, що $U_\alpha \setminus U_\beta \subseteq U_{\alpha \setminus_1 \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \setminus U_\beta$. Тоді $d \in U_\alpha$, $d \notin U_\beta$. Значення характеристичних функцій відповідних мультимножин на аргументі d буде наступним: $\chi_\alpha(d) \geq 1$ і $\chi_\beta(d) = 0$. Таким чином,

$sg(\chi_\alpha(d))=1$, а $sg(\chi_\beta(d))=0$. Отже $sg(\chi_\alpha(d))\dot{-}sg(\chi_\beta(d))>0$, і, значить, $d\in U_{\alpha\setminus_1\beta}$.▪□

Зауважимо, що операціям $+_{All}$, $\bigcap_{All}$ та $\setminus_{All}$ відповідають наступні ключові слова в SQL-подібних мовах: UNION ALL, INTERSECT ALL, MINUS ALL; операціям $+_1$, $\bigcap_1$, $\setminus_1$, призначеним для побудови 1-мультимножин, відповідають наступні ключові слова: DISTINCT UNION, DISTINCT INTERSECT, DISTINCT MINUS [16].

2.2.5. Операція симетричної різниці

Операція Δ_{All} мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\left|\chi_\alpha(d)-\chi_\beta(d)\right|$.

Для визначення основи мультимножини $\alpha\,\Delta_{All}\beta$ введемо наступну множину $\varphi(U_\alpha,U_\beta)\overset{def}{=}\{d\mid d\in U_\alpha\bigcap U_\beta\ \&\ \chi_\alpha(d)\neq\chi_\beta(d)\}$.

Твердження 2.12. Основа мультимножини $\alpha\,\Delta_{All}\beta$ задається виразом:

$$(U_\alpha\setminus U_\beta)\bigcup(U_\beta\setminus U_\alpha)\bigcup\varphi(U_\alpha,U_\beta)=\left(U_\alpha\,\Delta U_\beta\right)\bigcup\varphi(U_\alpha,U_\beta),$$

де Δ – множинна операція симетричної різниці.□

Доведення. ■ Покажемо, що $U_{\alpha\Delta_{All}\beta}\subseteq\left(U_\alpha\,\Delta U_\beta\right)\bigcup\varphi(U_\alpha,U_\beta)$. Нехай $d\in U_{\alpha\Delta_{All}\beta}$. Тоді $\left|\chi_\alpha(d)-\chi_\beta(d)\right|>0$ та можливі тільки три наступні випадки:

1) $d\in U_\alpha$ і $d\notin U_\beta$, тоді $d\in U_\alpha\setminus U_\beta$;

2) $d\notin U_\alpha$ і $d\in U_\beta$, тоді $d\in U_\beta\setminus U_\alpha$;

3) $d\in U_\alpha$, $d\in U_\beta$ і $\chi_\alpha(d)\neq\chi_\beta(d)$, тоді $d\in\varphi(U_\alpha,U_\beta)$.

Таким чином, $d\in\left(U_\alpha\,\Delta U_\beta\right)\bigcup\varphi(U_\alpha,U_\beta)$. Включення виконується.▪

■ Розглянемо обернене включення $(U_\alpha \, \Delta U_\beta) \bigcup \varphi(U_\alpha, U_\beta) \subseteq U_{\alpha \Delta_{AII} \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \, \Delta U_\beta \bigcup \varphi(U_\alpha, U_\beta)$. Тоді $d \in U_\alpha \, \Delta U_\beta$ або $d \in \varphi(U_\alpha, U_\beta)$. Якщо $d \in U_\alpha \, \Delta U_\beta$, то можливі два випадки: $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$ або $d \notin U_\alpha$ і $d \in U_\beta$. В обох випадках $\left|\chi_\alpha(d) - \chi_\beta(d)\right| > 0$, тому $d \in U_{\alpha \Delta_{AII} \beta}$. Якщо $d \in \varphi(U_\alpha, U_\beta)$, тоді $d \in U_\alpha$, $d \in U_\beta$ та $\chi_\alpha(d) \neq \chi_\beta(d)$. В цьому випадку також $\left|\chi_\alpha(d) - \chi_\beta(d)\right| > 0$, і, значить, $d \in U_{\alpha \Delta_{AII} \beta}$.▪□

Операція Δ_1 мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\left|sg(\chi_\alpha(d)) - sg(\chi_\beta(d))\right|$.

Твердження 2.13. Основа мультимножина $\alpha \, \Delta_1 \beta$ дорівнює симетричній різниці основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \, \Delta_1 \beta} = U_\alpha \Delta U_\beta$.□

Доведення. ■ Покажемо, що $U_{\alpha \, \Delta_1 \beta} \subseteq U_\alpha \Delta U_\beta$. Нехай $d \in U_{\alpha \, \Delta_1 \beta}$. Тоді $\left|sg(\chi_\alpha(d)) - sg(\chi_\beta(d))\right| > 0$, тобто $\left|sg(\chi_\alpha(d)) - sg(\chi_\beta(d))\right| = 1$. Це можливо у двох випадках: $sg(\chi_\alpha(d)) = 1$, $sg(\chi_\beta(d)) = 0$ або $sg(\chi_\alpha(d)) = 0$, $sg(\chi_\beta(d)) = 1$. У першому випадку $\chi_\alpha(d) \geq 1$ і $\chi_\beta(d) = 0$; і, значить, $d \in U_\alpha$ і $d \notin U_\beta$. У другому випадку $\chi_\alpha(d) = 0$ і $\chi_\beta(d) \geq 1$; і, значить, $d \notin U_\alpha$ і $d \in U_\beta$. Залишається лише використати означення теоретико-множинної операції симетричної різниці.▪

■ Доведемо обернене включення: $U_\alpha \Delta U_\beta \subseteq U_{\alpha \, \Delta_1 \beta}$. Нехай $d \in U_\alpha \Delta U_\beta$. Тоді, за означенням операції симетричної різниці, можливі такі випадки: $d \in U_\alpha$, $d \notin U_\beta$ або $d \notin U_\alpha$, $d \in U_\beta$. В першому випадку значення характеристичних функцій відповідних мультимножин на аргументі d будуть наступні: $\chi_\alpha(d) \geq 1$, $\chi_\beta(d) = 0$, і, значить, $\left|sg(\chi_\alpha(d)) - sg(\chi_\beta(d))\right| > 0$ і $d \in U_{\alpha \, \Delta_1 \beta}$. У другому випадку значення характеристичних функцій відповідних мультимножин на аргументі d будуть: $\chi_\alpha(d) = 0$, $\chi_\beta(d) \geq 1$, і, значить, $\left|sg(\chi_\alpha(d)) - sg(\chi_\beta(d))\right| > 0$ і $d \in U_{\alpha \, \Delta_1 \beta}$.▪□

2.2.6. Операція доповнення

Зафіксуємо деяку мультимножину Z, яку будемо називати універсумом мультимножин[1]. Операція доповнення є параметричною операцією, де параметром виступає універсум Z.

Доповнення мультимножини α до універсума Z задається наступним чином (для спрощення позначень, параметр явно вказувати не будемо): $\overline{\alpha} = Z \setminus_{All} \alpha$.

Зв'язок між характеристичними функціями визначається за означенням операції різниці: $\chi_{\overline{\alpha}}(d) = \chi_Z(d) \dot{-} \chi_\alpha(d), \forall d \in D$.

Основа мультимножини також буде визначатися аналогічним чином:

$$U_{\overline{\alpha}} = \{d \mid \chi_Z(d) > \chi_\alpha(d)\} = U_Z \setminus U_\alpha \bigcup \{d \mid d \in U_Z \bigcap U_\alpha \ \& \ Z(d) > \alpha(d)\}.$$

Зокрема, якщо основа мультимножини Z співпадає з універсумом елементів основ D, тоді попередня формула спрощується і має наступний вигляд:

$$U_{\overline{\alpha}} = \overline{U_\alpha} \bigcup \{d \mid d \in U_\alpha \ \& \ Z(d) > \alpha(d)\},$$

де $\overline{U_\alpha}$ – доповнення до універсума D.

2.2.7. Операція добутку

Операція $\bullet_{All}$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $\chi_\alpha(d) \cdot \chi_\beta(d)$.

Твердження 2.14. Основа мультимножина $\alpha \bullet_{All} \beta$ дорівнює перетину основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha \bullet_{All} \beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$.□

---

[1] Зауважимо, що в цьому пункті, присвяченому доповненню, термін універсум мультимножин має локальне значення і його зміст відрізняється від змісту стандартного терміну.

Доведення. ■ Покажемо, що $U_{\alpha\bullet_{All}\beta}\subseteq U_\alpha\bigcap U_\beta$. Нехай $d\in U_{\alpha\bullet_{All}\beta}$. Тоді $\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\beta(d)>0$. Це означає, що $\chi_\alpha(d)\neq 0$ (тобто $\chi_\alpha(d)>0$) та $\chi_\beta(d)\neq 0$ (тобто $\chi_\beta(d)>0$). Таким чином $d\in U_\alpha$ і $d\in U_\beta$, а значить $d\in U_\alpha\bigcap U_\beta$. Включення виконується.▪

■ Розглянемо обернене включення: $U_\alpha\bigcap U_\beta\subseteq U_{\alpha\bullet_{All}\beta}$. Нехай $d\in U_\alpha\bigcap U_\beta$. За означення операції перетину, $d\in U_\alpha$ і $d\in U_\beta$ одночасно. Тобто $\chi_\alpha(d)>0$ і $\chi_\beta(d)>0$. А значить, $\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\beta(d)>0$. Таким чином $d\in U_{\alpha\bullet_{All}\beta}$.▪□

Операція $\bullet_1$ мультимножинам α і β зіставляє мультимножину, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $sg(\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\beta(d))$ або в еквівалентній формі $sg(\chi_\alpha(d))\cdot sg(\chi_\beta(d))$.

Твердження 2.15. Основа мультимножини $\alpha\bullet_1\beta$ дорівнює перетину основ відповідних мультимножин: $U_{\alpha\bullet_1\beta}=U_\alpha\bigcap U_\beta$.□

Доведення. Для цього необхідно використати попереднє доведення та означення операції sg.□

Зауважимо, що операції добутку $\bullet_1$ та перетину $\bigcap_1$ співпадають, оскільки виконується наступна рівність $sg(\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\beta(d))=$ $sg(\min(\chi_\alpha(d),\chi_\beta(d)))$, яка перевіряється безпосередньо.

2.2.8. Операція множення числа на мультимножину

Операція множення числа $k\in N$ на мультимножину α зіставляє мультимножині α мультимножину $k\cdot\alpha$, значення характеристичної функції якої на довільному аргументі d задається виразом $k\cdot\chi_\alpha(d)$.

Основа мультимножини α не змінюється після виконання операції, а змінюється лише кількість дублікатів кожного елементу.

Той же результат – $k \cdot \alpha$ – дає операція добутку мультимножини α на постійну мультимножину $\overline{k}_D$: $k \cdot \alpha = \overline{k}_D \bullet_{All} \alpha$, де мультимножина $\overline{k}_D$ визначається як $\overline{k}_D : D \to \{k\}$. Останню рівність для мультимножин неважко перевірити, використовуючи означення відповідних операцій.

2.2.9. Операція прямого (декартового) з'єднання

Операція прямого з'єднання мультимножин $\otimes$ мультимножинам α і β з основами U_α і U_β відповідно зіставляє мультимножину, основою якої є множина $U_\alpha \times U_\beta$, а характеристична функція задається рівністю $\chi(\langle d_1, d_2 \rangle) = \chi_\alpha(d_1) \cdot \chi_\beta(d_2), \forall d_1, d_2 \in D$ (звісно, в припущенні, що універсум основ мультимножин замкнений відносно операції прямого (декартового) добутку множин).

2.3. Властивості операцій над мультимножинами

Твердження 2.16. Для довільних мультимножин α і β виконується наступна еквівалентність: $\alpha \preceq \beta \Leftrightarrow \alpha = \alpha \bigcap_{All} \beta$.□

Доведення. ■ Покажемо спочатку, що $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha = \alpha \bigcap_{All} \beta$. Якщо $\alpha \preceq \beta$, то за твердженням 2.2 $\chi_\alpha(d) \leq \chi_\beta(d), \forall d \in D$. Запишемо рівність $\alpha = \alpha \bigcap_{All} \beta$ у термінах характеристичних функцій згідно твердження 2.1: $\chi_\alpha(d) = \min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \forall d \in D$. Ця рівність справедлива, адже за умовою $\chi_\alpha(d) \leq \chi_\beta(d), \forall d \in D$.▪

■ Покажемо обернену імплікацію: $\alpha = \alpha \bigcap_{All} \beta \Rightarrow \alpha \preceq \beta$.

Запишемо рівність $\alpha = \alpha \bigcap_{All} \beta$ у термінах характеристичних функцій: $\chi_\alpha(d) = \min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \forall d \in D$. З цієї рівності випливає , що $\chi_\alpha(d) \le \chi_\beta(d)$, $\forall d \in D$, а значить $\alpha \preceq \beta$ (згідно твердження 2.2).▪□

Твердження 2.17. Для довільних мультимножин α і β виконується наступна еквівалентність: $\alpha \preceq \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha \bigcup_{All} \beta$.□

Доведення проводиться аналогічним чином як у твердженні 2.16.□

Останні два твердження є характеристиками відношення включення мультимножин у термінах операцій $\bigcup_{All}$, $\bigcap_{All}$.

Твердження 2.18. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \bigcap_{All} \beta \preceq \alpha, \ \alpha \bigcap_{All} \beta \preceq \beta .\square$$

Доведення. ■ Розглянемо першу частину твердження: $\alpha \bigcap_{All} \beta \preceq \alpha$; її доведення випливає із означень відношення включення, операції $\bigcap_{All}$ та очевидної нерівності $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \le \chi_\alpha(d), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності: $\min(x, y) \le x$.▪

■ Доведення другої частини твердження проводиться аналогічним чином.▪□

Твердження 2.19. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \bigcap_{All} \beta \preceq \alpha \bigcup_{All} \beta .\square$$

Доведення. Випливає із означень відношення включення, операцій $\bigcup_{All}$, $\bigcap_{All}$ та очевидної нерівності $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \le \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності $\min(x, y) \le \max(x, y)$.□

Твердження 2.20. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \preceq \alpha \bigcup_{All} \beta, \ \beta \preceq \alpha \bigcup_{All} \beta .\square$$

Доведення. ■ Доведення першої частини твердження випливає із означень відношення включення, операції $\bigcup_{All}$ та очевидної нерівності

$\chi_\alpha(d) \le \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності $x \le \max(x, y)$.▪

■ Друга частина твердження доводиться аналогічним чином.▪□

Твердження 2.21. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \setminus_{All} \beta \preceq \alpha .\square$$

Доведення випливає із означень відношення включення, операції $\setminus_{All}$ і очевидної нерівності $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d) \le \chi_\alpha(d), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності: $x \dot{-} y \le x$, що виконується $\forall x, y \in N$.□

Твердження 2.22. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \setminus_{All} \beta \preceq \alpha \,\Delta_{All} \beta,\ \beta \setminus_{All} \alpha \preceq \alpha \,\Delta_{All} \beta .\square$$

Доведення. ■ Доведення першої частини твердження випливає із означень відношення включення, операцій $\setminus_{All}$, Δ_{All} та очевидної нерівності $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d) \le |\chi_\alpha(d) - \chi_\beta(d)|, \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності $x \dot{-} y \le |x - y|$, що виконується $\forall x, y \in N$.▪

■ Розглянемо другу частину твердження: $\beta \setminus_{All} \alpha \preceq \alpha \,\Delta_{All} \beta$. Так як операція Δ_{All} є комутативною (див. твердження 2.31), то $\beta \setminus_{All} \alpha \preceq \beta \,\Delta_{All} \alpha = \alpha \,\Delta_{All} \beta$.▪□

Твердження 2.23. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \,\Delta_{All} \beta \preceq \alpha \cup_{All} \beta .\square$$

Доведення випливає із означень відношення включення, операцій Δ_{All}, $\cup_{All}$ та очевидної нерівності $|\chi_\alpha(d) - \chi_\beta(d)| \le \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності: $|x - y| \le \max(x, y)$, що виконується $\forall x, y \ge 0$.□

Твердження 2.24. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \preceq k \cdot \alpha, \forall k \in N^+ .\square$$

Доведення є очевидним.□

Твердження 2.25. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \bigcap_{All} \beta \preceq \alpha \bullet_{All} \beta .\square$$

Доведення випливає із означень відношення включення, операцій $\bigcap_{All}$, $\bullet_{All}$ та очевидної нерівності $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \le \chi_\alpha(d) \cdot \chi_\beta(d), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності: $\min(x, y) \le x \cdot y$, що виконується $\forall x, y \in N$.□

Твердження 2.26. Для довільних мультимножин α і β виконується:

$$\alpha \bigcup_{All} \beta \preceq \alpha +_{All} \beta .\square$$

Доведення випливає із означень відношення включення, операцій $\bigcup_{All}$, $+_{All}$ та очевидної нерівності $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \le \chi_\alpha(d) + \chi_\beta(d), \forall d \in D$, яка є частковим випадком нерівності: $\max(x, y) \le x + y$, що виконується $\forall x, y \ge 0$.□

Твердження 2.27. Зафіксуємо мультимножину Z. Для довільної мультимножини α, такої що $\alpha \preceq \mathrm{Z}$, виконується закон подвійного заперечення: $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$.□

Доведення. Як було сказано вище, операція доповнення є параметричною, а отже $\overline{\alpha} \overset{def}{=} \overline{\alpha}^{\mathrm{Z}} \overset{def}{=} \mathrm{Z} \setminus_{All} \alpha$. Тому властивість подвійного заперечення запишемо наступним чином: $\overline{(\overline{\alpha})} = \mathrm{Z} \setminus_{All} (\mathrm{Z} \setminus_{All} \alpha) = \alpha$. Далі, використовуючи означення операції $\setminus_{All}$, запишемо цю рівність у термінах характеристичних функцій (твердження 2.1): $\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} (\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} \chi_\alpha(d)) = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Перевіримо справедливість останньої рівності. Так як $\alpha \preceq \mathrm{Z}$, то за означенням відношення включення виконується нерівність $\chi_\alpha(d) \le \chi_{\mathrm{Z}}(d), \forall d \in D$. Тому

$$\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} (\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} \chi_\alpha(d)) = \chi_{\mathrm{Z}}(d) - (\chi_{\mathrm{Z}}(d) - \chi_\alpha(d)) = \chi_{\mathrm{Z}}(d) - \chi_{\mathrm{Z}}(d) + \chi_\alpha(d) = \chi_\alpha(d) .\square$$

Твердження 2.28. Зафіксуємо мультимножину Z. Для довільної мультимножини α, такої що $\alpha \preceq \mathrm{Z}$, виконуються наступні рівності:

$$\alpha \bigcup_{All} Z = \alpha +_{All} \overline{\alpha} = Z. \square$$

Доведення. ■ Доведемо спочатку, що $\alpha \bigcup_{All} Z = Z$. Перепишемо цю рівність у термінах характеристичних функцій (твердження 2.1):

$$\max(\chi_\alpha(d), \chi_Z(d)) = \chi_Z(d), \forall d \in D.$$

Ця рівність справедлива, адже за умовою $\alpha \preceq Z$ (тобто $\chi_\alpha(d) \le \chi_Z(d), \forall d \in D$ згідно з твердженням 2.2).▪

■ Покажемо тепер, що $\alpha +_{All} \overline{\alpha} = Z$. Запишемо рівність наступним чином:

$$\alpha +_{All} \overline{\alpha} = \alpha +_{All} \left(Z \setminus_{All} \alpha\right) = Z.$$

Тепер перепишемо її в термінах характеристичних функцій, використовуючи означення операцій $+_{All}$ та $\setminus_{All}$: $\chi_\alpha(d) + \left(\chi_Z(d) \dot{-} \chi_\alpha(d)\right) =$ $= \chi_Z(d), \forall d \in D$.

Враховуючи, що $\chi_\alpha(d) \le \chi_Z(d), \forall d \in D$ за умовою, маємо

$$\chi_\alpha(d) + \left(\chi_Z(d) \dot{-} \chi_\alpha(d)\right) = \chi_\alpha(d) + \left(\chi_Z(d) - \chi_\alpha(d)\right) = \chi_\alpha(d) + \chi_Z(d) - \chi_\alpha(d) = \chi_Z(d).▪\square$$

Твердження 2.29. Зафіксуємо мультимножину Z. Для довільної мультимножини α, такої що $\alpha \preceq Z$, виконується рівність $\alpha \bigcap_{All} Z = \alpha$; крім того, для довільної мультимножини α виконуються наступні рівності:

$$\alpha \bigcup_{All} \varnothing_m = \alpha,\ \alpha +_{All} \varnothing_m = \alpha,\ \alpha \setminus_{All} \varnothing_m = \alpha,\ \alpha\ \Delta_{All} \varnothing_m = \alpha. \square$$

Доведення. Для доведення перепишемо кожну з цих рівностей у термінах характеристичних функцій, використовуючи означення відповідних операцій. Зазначимо, що характеристична функція порожньої мультимножини приймає значення 0, $\forall d \in D$.

■ Рівність $\alpha \bigcap_{All} Z = \alpha$: $\min(\chi_\alpha(d), \chi_Z(d)) = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Остання рівність виконується, адже за умовою $\chi_\alpha(d) \le \chi_Z(d), \forall d \in D$, так як $\alpha \preceq Z$.▪

■ Рівність $\alpha \bigcup_{All} \varnothing_m = \alpha$: $\max(\chi_\alpha(d), 0) = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Остання рівність є частковим випадком рівності $\max(x,0) = x$, яка виконується $\forall x \ge 0$.▪

■ Рівність $\alpha +_{All} \varnothing_m = \alpha$: $\chi_\alpha(d) + 0 = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Справедливість останньої рівності очевидна.▪

■ Рівність $\alpha \setminus_{All} \varnothing_m = \alpha$: $\chi_\alpha(d) \dot{-} 0 = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Остання рівність є частковим випадком рівності $x \dot{-} 0 = x$, яка виконується $\forall x \geq 0$.▪

■ Рівність $\alpha\, \Delta_{All} \varnothing_m = \alpha$: $|\chi_\alpha(d) - 0| = \chi_\alpha(d), \forall d \in D$. Остання рівність є частковим випадком рівності $|x - 0| = x$, яка виконується $\forall x \geq 0$.▪□

Твердження 2.30. Для довільної мультимножини α виконуються наступні рівності:

$$\alpha \bigcap_{All} \varnothing_m = \varnothing_m,\ \alpha \setminus_{All} \alpha = \varnothing_m,\ \varnothing_m \setminus_{All} \alpha = \varnothing_m,\ \alpha\, \Delta_{All} \alpha = \varnothing_m,\ \alpha \bullet_{All} \varnothing_m = \varnothing_m.\square$$

Доведення. Доведення побудуємо аналогічним чином, як в попередньому твердженні. Тому перепишемо кожну із цих рівностей у термінах характеристичних функцій, використовуючи означення відповідних операцій. Нагадаймо також, що характеристична функція, яка приймає значення 0, $\forall d \in D$, відповідає порожній мультимножині.

■ Рівність $\alpha \bigcap_{All} \varnothing_m = \varnothing_m$: $\min(\chi_\alpha(d), 0) = 0, \forall d \in D$. Остання рівність є частковим випадком рівності $\min(x, 0) = 0$, яка виконується $\forall x \geq 0$.▪

■ Рівність $\alpha \setminus_{All} \alpha = \varnothing_m$: $\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\alpha(d) = \chi_\alpha(d) - \chi_\alpha(d) = 0, \forall d \in D$. Справедливість останньої рівності випливає із означення операції зрізаної різниці.▪

■ Рівність $\varnothing_m \setminus_{All} \alpha = \varnothing_m$: $0 \dot{-} \chi_\alpha(d) = 0, \forall d \in D$. Справедливість останньої рівності випливає із означення операції зрізаної різниці.▪

■ Рівність $\alpha\, \Delta_{All} \alpha = \varnothing_m$: $|\chi_\alpha(d) - \chi_\alpha(d)| = 0, \forall d \in D$. Остання рівність є частковим випадком рівності $|x - x| = 0$, яка виконується $\forall x$.▪

■ Рівність $\alpha \bullet_{All} \varnothing_m = \varnothing_m$: $\chi_\alpha(d) \cdot 0 = 0, \forall d \in D$. Справедливість останньої рівності очевидна.▪□

Твердження 2.31. Операції симетричної різниці, додавання та добутку комутативні:

$$\alpha\, \Delta_{All} \beta = \beta\, \Delta_{All} \alpha,\ \alpha +_{All} \beta = \beta +_{All} \alpha,\ \alpha \bullet_{All} \beta = \beta \bullet_{All} \alpha.\square$$

Доведення. ■ Спочатку доведемо першу рівність. Комутативність операції Δ_{All} випливає із означення операції Δ_{All} та очевидної рівності $\left|\chi_\alpha(d)-\chi_\beta(d)\right| = \left|\chi_\beta(d)-\chi_\alpha(d)\right|, \forall d \in D$, яка є частковим випадком тривіальної рівності $|x-y| = |y-x|$.▪

■ Комутативність операції $+_{All}$ випливає із означення операції $+_{All}$ та комутативності теоретико-числового додавання.▪

■ Комутативність операції $\bullet_{All}$ випливає із означення операції $\bullet_{All}$ та комутативності теоретико-числового добутку.▪□

Твердження 2.32. Операції додавання та добутку є асоціативними:

$$\alpha +_{All} (\beta +_{All} \gamma) = (\alpha +_{All} \beta) +_{All} \gamma, \ \alpha \bullet_{All} (\beta \bullet_{All} \gamma) = (\alpha \bullet_{All} \beta) \bullet_{All} \gamma. \square$$

Доведення. ■ Асоціативність операції $+_{All}$ випливає із означення операції $+_{All}$ та асоціативності теоретико-числового додавання.▪

■ Асоціативність операції $\bullet_{All}$ випливає із означення операції $\bullet_{All}$ та асоціативності теоретико-числового добутку.▪□

Решта тверджень присвячена взаємній дистрибутивності введених операцій.

Твердження 2.33. Операції $\bigcup_{All}$ та $\bigcap_{All}$ є взаємно дистрибутивними:

$$(\alpha \bigcup_{All} \beta) \bigcap_{All} \gamma = (\alpha \bigcap_{All} \gamma) \bigcup_{All} (\beta \bigcap_{All} \gamma),$$
$$(\alpha \bigcap_{All} \beta) \bigcup_{All} \gamma = (\alpha \bigcup_{All} \gamma) \bigcap_{All} (\beta \bigcup_{All} \gamma). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу частину твердження. Використовуючи означення операцій $\bigcup_{All}$ та $\bigcap_{All}$, перепишемо рівність $(\alpha \bigcup_{All} \beta) \bigcap_{All} \gamma = (\alpha \bigcap_{All} \gamma) \bigcup_{All} (\beta \bigcap_{All} \gamma)$ у термінах характеристичних функцій:

$$\min(\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)), \chi_\gamma(d)) = \max(\min(\chi_\alpha(d), \chi_\gamma(d)), \min(\chi_\beta(d), \chi_\gamma(d))), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності: $\min(\max(x, y), z) =$ $= \max(\min(x, z), \min(y, z))$, яку і доведемо.

Розглянемо усі можливі випадки (без втрати загальності можна розглядати тільки випадки строгих нерівностей):

1) якщо $x < y < z$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(y,z) = y,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(x,y) = y;$$

2) якщо $x < z < y$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(y,z) = z,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(x,z) = z;$$

3) якщо $y < x < z$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(x,z) = x,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(x,y) = x;$$

4) якщо $y < z < x$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(x,z) = z,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(z,y) = z;$$

5) якщо $z < x < y$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(y,z) = z,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(z,z) = z;$$

6) якщо $z < y < x$, тоді

$$\min(\max(x,y),z) = \min(x,z) = z,$$

$$\max(\min(x,z),\min(y,z)) = \max(z,z) = z.$$

Розглянуті вище випадки доводять, що рівність $\min(\max(x,y),z) =$ $= \max(\min(x,z),\min(y,z))$ виконується $\forall x,y,z \geq 0$.▪

■ Справедливість рівності $(\alpha \cap_{All} \beta) \cup_{All} \gamma = (\alpha \cup_{All} \gamma) \cap_{All} (\beta \cup_{All} \gamma)$ доводиться аналогічним чином.▪□

Отже, дистрибутивність операцій об'єднання та перетину мультимножин є наслідком аналогічної властивості для теоретико-числових функцій взяття максимуму та мінімуму.

Твердження 2.34. Операція додавання $+_{All}$ є дистрибутивною відносно операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$:

$$\left(\alpha \bigcup_{All} \beta\right) +_{All} \gamma = \left(\alpha +_{All} \gamma\right) \bigcup_{All} \left(\beta +_{All} \gamma\right),$$

$$\left(\alpha \bigcap_{All} \beta\right) +_{All} \gamma = \left(\alpha +_{All} \gamma\right) \bigcap_{All} \left(\beta +_{All} \gamma\right). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу частину твердження. Використовуючи означення операцій $\bigcup_{All}$ та $+_{All}$, перепишемо рівність $\left(\alpha \bigcup_{All} \beta\right) +_{All} \gamma = \left(\alpha +_{All} \gamma\right) \bigcup_{All} \left(\beta +_{All} \gamma\right)$ у термінах характеристичних функцій:

$$\max\left(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)\right) + \chi_\gamma(d) = \max\left(\chi_\alpha(d) + \chi_\gamma(d), \chi_\beta(d) + \chi_\gamma(d)\right), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності $\max(x, y) + z = \max(x + z, y + z)$, яка виконується $\forall x, y, z \geq 0$.▪

■ Справедливість рівності $\left(\alpha \bigcap_{All} \beta\right) +_{All} \gamma = \left(\alpha +_{All} \gamma\right) \bigcap_{All} \left(\beta +_{All} \gamma\right)$ доводиться аналогічним чином.▪□

Твердження 2.35. Операція різниці $\setminus_{All}$ є дистрибутивною за першим аргументом відносно операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$:

$$\left(\alpha \bigcup_{All} \beta\right) \setminus_{All} \gamma = \left(\alpha \setminus_{All} \gamma\right) \bigcup_{All} \left(\beta \setminus_{All} \gamma\right),$$

$$\left(\alpha \bigcap_{All} \beta\right) \setminus_{All} \gamma = \left(\alpha \setminus_{All} \gamma\right) \bigcap_{All} \left(\beta \setminus_{All} \gamma\right). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу частину твердження. Використовуючи означення операцій $\bigcup_{All}$ та $\setminus_{All}$, перепишемо рівність $\left(\alpha \bigcup_{All} \beta\right) \setminus_{All} \gamma = \left(\alpha \setminus_{All} \gamma\right) \bigcup_{All} \left(\beta \setminus_{All} \gamma\right)$ у термінах характеристичних функцій:

$$\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \dot{-} \chi_\gamma(d) = \max\left(\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\gamma(d), \chi_\beta(d) \dot{-} \chi_\gamma(d)\right), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності: $\max(x, y) \dot{-} z = \max(x \dot{-} z, y \dot{-} z))$, яку і доведемо.

Для доведення розглянемо усі можливі випадки (як і раніше обмежимось випадками лише строгих нерівностей):

1) якщо $x < y < z$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = y \dot{-} z = 0,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(0{,}0) = 0;$$

2) якщо $x < z < y$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = y \dot{-} z = y - z,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(0, y - z) = y - z;$$

3) якщо $y < x < z$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = x \dot{-} z = 0,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(0{,}0) = 0;$$

4) якщо $y < z < x$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = x \dot{-} z = x - z,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(x - z{,}0) = x - z;$$

5) якщо $z < x < y$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = y \dot{-} z = y - z,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(x - z, y - z) = y - z;$$

6) якщо $z < y < x$, тоді

$$\max(x, y) \dot{-} z = x \dot{-} z = x - z,$$

$$\max(x \dot{-} z, y \dot{-} z) = \max(x - z, y - z) = x - z.$$

Розглянуті вище випадки доводять, що рівність $\max(x, y) \dot{-} z = \max(x \dot{-} z, y \dot{-} z))$ виконується $\forall x, y, z \geq 0$.▪

■ Справедливість рівності $(\alpha \cap_{All} \beta) \setminus_{All} \gamma = (\alpha \setminus_{All} \gamma) \cap_{All} (\beta \setminus_{All} \gamma)$ перевіряється аналогічним чином.▪□

Отже, вказана дистрибутивність операції різниці мультимножин є наслідком дистрибутивності зрізаної різниці за першим аргументом відносно функції максимуму (мінімуму).

Твердження 2.36. Операція добутку $\bullet_{All}$ є дистрибутивною відносно операцій об’єднання $\cup_{All}$ та перетину $\cap_{All}$:

$$(\alpha \cup_{All} \beta) \bullet_{All} \gamma = (\alpha \bullet_{All} \gamma) \cup_{All} (\beta \bullet_{All} \gamma),$$

$$(\alpha \cap_{All} \beta) \bullet_{All} \gamma = (\alpha \bullet_{All} \gamma) \cap_{All} (\beta \bullet_{All} \gamma). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу частину твердження. Використовуючи означення операцій $\cup_{All}$ та $\bullet_{All}$, перепишемо рівність $(\alpha \cup_{All} \beta) \bullet_{All} \gamma = (\alpha \bullet_{All} \gamma) \cup_{All} (\beta \bullet_{All} \gamma)$ у термінах характеристичних функцій:

$$\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) \cdot \chi_\gamma(d) = \max(\chi_\alpha(d) \cdot \chi_\gamma(d), \chi_\beta(d) \cdot \chi_\gamma(d)), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності $\max(x, y) \cdot z = \max(x \cdot z, y \cdot z)$, яка виконується $\forall x, y, z \ge 0$. ▪

■ Друга частина твердження доводиться аналогічним чином.▪□

Отже, дистрибутивність операції добутку мультимножин є наслідком дистрибутивності числового добутку відносно функції максимуму (мінімуму).

Твердження 2.37. Операція множення числа на мультимножину є дистрибутивною відносно операцій об’єднання $\cup_{All}$ та перетину $\cap_{All}$:

$$k \cdot (\alpha \cup_{All} \beta) = (k \cdot \alpha) \cup_{All} (k \cdot \beta),$$

$$k \cdot (\alpha \cap_{All} \beta) = (k \cdot \alpha) \cap_{All} (k \cdot \beta). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу частину твердження. Використовуючи означення операцій $\cup_{All}$, $\cap_{All}$ та операції множення числа на мультимножину, перепишемо рівність $k \cdot (\alpha \cup_{All} \beta) = (k \cdot \alpha) \cup_{All} (k \cdot \beta)$ у термінах характеристичних функцій:

$$k \cdot \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) = \max(k \cdot \chi_\alpha(d), k \cdot \chi_\beta(d)), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності $k \cdot \max(x, y) = \max(k \cdot x, k \cdot y)$, справедливість якої $\forall x, y, k \ge 0$ є очевидною.▪

■ Друга частина твердження доводиться аналогічним чином.▪□

Твердження 2.38. Операція добутку $\bullet_{All}$ мультимножин є дистрибутивною відносно операції додавання $+_{All}$:

$$(\alpha +_{All} \beta) \bullet_{All} \gamma = (\alpha \bullet_{All} \gamma) +_{All} (\beta \bullet_{All} \gamma). \square$$

Доведення випливає з означень операцій $+_{All}$, $\bullet_{All}$ та рівності $(\chi_\alpha(d)+\chi_\beta(d))\cdot\chi_\gamma(d)=(\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\gamma(d))+(\chi_\beta(d)\cdot\chi_\gamma(d)), \forall d\in D$, яка є частковим випадком очевидної рівності: $(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$, що виконується $\forall x,y,z$.□

Твердження 2.39. Операція добутку $\bullet_{All}$ мультимножин є дистрибутивною відносно операції різниці $\setminus_{All}$:

$$(\alpha\setminus_{All}\beta)\bullet_{All}\gamma=(\alpha\bullet_{All}\gamma)\setminus_{All}(\beta\bullet_{All}\gamma).□$$

Доведення. Використовуючи означення операцій $\setminus_{All}$ та $\bullet_{All}$, перепишемо рівність у термінах характеристичних функцій:

$$(\chi_\alpha(d)\dot{-}\chi_\beta(d))\cdot\chi_\gamma(d)=(\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\gamma(d))\dot{-}(\chi_\beta(d)\cdot\chi_\gamma(d)), \forall d\in D .$$

Остання рівність є частковим випадком рівності $(x\dot{-}y)\cdot z=(x\cdot z)\dot{-}(y\cdot z)$, справедливість якої $\forall x,y,z\geq 0$ є очевидною.▪□

Твердження 2.40. Операція добутку $\bullet_{All}$ мультимножин є дистрибутивною відносно операції симетричної різниці Δ_{All}:

$$(\alpha\,\Delta_{All}\beta)\bullet_{All}\gamma=(\alpha\bullet_{All}\gamma)\,\Delta_{All}(\beta\bullet_{All}\gamma).□$$

Доведення випливає з означень операцій Δ_{All}, $\bullet_{All}$ та очевидної рівності $|\chi_\alpha(d)-\chi_\beta(d)|\cdot\chi_\gamma(d)=|\chi_\alpha(d)\cdot\chi_\gamma(d)-\chi_\beta(d)\cdot\chi_\gamma(d)|, \forall d\in D$, яка є частковим випадком рівності: $|x-y|\cdot z=|x\cdot z-y\cdot x|$, що виконується $\forall x,y,z\geq 0$.□

Твердження 2.41. Операція множення числа на мультимножину є дистрибутивною відносно операції додавання $+_{All}$:

$$k\cdot(\alpha+_{All}\beta)=(k\cdot\alpha)+_{All}(k\cdot\beta).□$$

Доведення випливає з означень операцій $+_{All}$, множення числа на мультимножину та рівності $k\cdot(\chi_\alpha(d)+\chi_\beta(d))=k\cdot\chi_\alpha(d)+k\cdot\chi_\beta(d)$, $\forall d\in D$, яка є частковим випадком очевидної рівності: $k\cdot(x+y)=(k\cdot x)+(k\cdot y)$, що виконується $\forall x,y,k$.□

Твердження 2.42. Операція множення числа на мультимножину є дистрибутивною відносно операції різниці $\backslash_{All}$:

$$k \cdot (\alpha \backslash_{All} \beta) = (k \cdot \alpha) \backslash_{All} (k \cdot \beta). \square$$

Доведення. Використовуючи означення операції $\backslash_{All}$ та операції множення числа на мультимножину, перепишемо рівність у термінах характеристичних функцій: $k \cdot (\chi_\alpha(d) \dot{-} \chi_\beta(d)) = (k \cdot \chi_\alpha(d)) \dot{-} (k \cdot \chi_\beta(d)), \forall d \in D$.

Остання рівність є частковим випадком рівності $k \cdot (x \dot{-} y) = (k \cdot x) \dot{-} (k \cdot y)$, справедливість якої $\forall x, y, k \geq 0$ є очевидною.▪□

Твердження 2.43. Операція множення числа на мультимножину є дистрибутивною відносно операції симетричної різниці Δ_{All}:

$$k \cdot (\alpha \, \Delta_{All} \beta) = (k \cdot \alpha) \, \Delta_{All} (k \cdot \beta). \square$$

Доведення випливає з означень операцій Δ_{All}, множення числа на мультимножину та рівності $k \cdot |\chi_\alpha(d) - \chi_\beta(d)| = |k \cdot \chi_\alpha(d) - k \cdot \chi_\beta(d)|$, $\forall d \in D$, яка є частковим випадком очевидної рівності: $k \cdot |x - y| = |k \cdot x - k \cdot y|$, що виконується $\forall x, y, k \geq 0$.□

Твердження 2.44. Для довільних мультимножин α, β, Z виконуються наступні рівності:

$$\mathrm{Z} \backslash_{All} (\alpha \cup_{All} \beta) = (\mathrm{Z} \backslash_{All} \alpha) \cap_{All} (\mathrm{Z} \backslash_{All} \beta),$$

$$\mathrm{Z} \backslash_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = (\mathrm{Z} \backslash_{All} \alpha) \cup_{All} (\mathrm{Z} \backslash_{All} \beta). \square$$

Доведення. ■ Розглянемо спочатку першу рівність твердження. Використовуючи означення операцій $\backslash_{All}$ та $\cup_{All}$, перепишемо цю рівність у термінах характеристичних функцій: $\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d)) =$ $= \min(\chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} \chi_\alpha(d), \chi_{\mathrm{Z}}(d) \dot{-} \chi_\beta(d)), \forall d \in D$.

Остання рівність є частковим випадком рівності: $z \dot{-} \max(x, y) =$ $= \min(z \dot{-} x, z \dot{-} y)), \forall x, y, z \geq 0$, яку і доведемо.

Розглянемо усі можливі випадки (аналогічно як і у твердженні 2.35, обмежимось випадками лише строгих нерівностей):

1) якщо $x < y < z$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} y = z - y,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(z - x, z - y) = z - y;$$

2) якщо $x < z < y$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} y = 0,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(z - x, 0) = 0;$$

3) якщо $y < x < z$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} x = z - x,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(z - x, z - y) = z - x;$$

4) якщо $y < z < x$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} x = 0,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(0, z - y) = 0;$$

5) якщо $z < x < y$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} y = 0,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(0, 0) = 0;$$

6) якщо $z < y < x$, тоді

$$z \dot{-} \max(x, y) = z \dot{-} x = 0,$$

$$\min(z \dot{-} x, z \dot{-} y) = \min(0, 0) = 0. ▪$$

■ Справедливість рівності $Z \setminus_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = (Z \setminus_{All} \alpha) \cup_{All} (Z \setminus_{All} \beta)$ перевіряється аналогічним чином.▪□

Наслідок 2.1. Для довільних мультимножин α та β виконуються аналоги законів де Моргана:

$$\overline{\alpha \cup_{All} \beta} = \overline{\alpha} \cap_{All} \overline{\beta}, \ \overline{\alpha \cap_{All} \beta} = \overline{\alpha} \cup_{All} \overline{\beta}. □$$

Доведення випливає з попереднього твердження та означення (параметричного) доповнення.□

2.4. Застосування отриманих результатів

Оптимізатори запитів — найбільш складні та найбільш цікаві компоненти СУБД. Перші роботи, в яких були отримані фундаментальні результати стосовно оптимізації запитів, було виконано в рамках проектів System R корпорації IBM та Ingres університету Беркли. У System R були закладені основи техніки оптимізації запитів на основі оцінок вартості плану виконання запиту. В університетському проекті Ingres фактично використовувалися методи, які пізніше стали називати семантичною оптимізацією запитів.

Сформулюємо проблеми оптимізації SQL-запитів. Мова SQL декларативна. У формулюваннях SQL-запитів вказується, якими властивостями мають володіти дані, що хоче отримати користувач. Але нічого не сказано про те, як система повинна інтерпретувати запит. Проблема полягає у тому, щоб за декларативною специфікацією запиту побудувати програму (так званий план виконання запиту), яка б виконувалася максимально ефективно та видавала результати, що відповідають вказаним у запиті властивостям. Тобто, основне утруднення полягає в тому, що потрібно вміти будувати усі можливі програми, результати яких відповідають вказаним властивостям, та обирати із множини цих програм саме ту програму, виконання якої було б найбільш ефективним.

Обидві частини проблеми є нетривіальними. Передусім, необхідно виявити усі коректні плани виконання запиту, або, принаймні, не пропустити який-небудь план, що є найбільш ефективним. Далі, для полегшення вирішення другої частини проблеми необхідно максимально скоротити простір коректних планів, залишивши лише ті плани, які претендують на максимальну ефективність. Обидві ці задачі не можна повністю формалізувати, адже відсутні точні математичні критерії вибору. Зазвичай, вирішення таких задач опирається на евристичні алгоритми [61].

Підсумовуючи вищесказане, відмітимо, що проблема оптимізації є досить нетривіальною. Для більш ефективного її вирішення виникає потреба у формалізації цього процесу.

Одним із можливих способів формалізації є визначення існуючих операцій над таблицями в термінах операцій над мультимножинами.

Відмітимо, що операціям $+_{All}$, $\bigcap_{All}$ та $\setminus_{All}$, які були визначені у попередніх підрозділах, відповідають наступні ключові слова в SQL-подібних мовах: UNION ALL, INTERSECT ALL, MINUS ALL. А операціям $+_1$, $\bigcap_1$, $\setminus_1$, призначеним для побудови 1-мультимножин, відповідають ключові слова DISTINCT UNION, DISTINCT INTERSECT, DISTINCT MINUS відповідно [16].

Таким чином, використовуючи формальне визначення відповідних операцій та їхніх властивостей (ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність), можна реалізовувати першу частину процесу оптимізації, а саме побудову планів виконання запиту на основі математичного підходу. Це збільшить достовірність та ефективність знаходження найбільш оптимальних планів виконання запиту.

У другому розділі наведено основні означення теорії мультимножин: означення мультимножини, характеристичної функції мультимножини, характеристик мультимножин (потужність, розмірність, піковий елемент, пікове значення), відношення включення мультимножин.

Над мультимножинами визначено аналоги стандартних теоретико-множинних операцій: об’єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення, прямого з’єднання. Крім цього, над мультимножинами визначено операції, що використовують специфіку мультимножин, і тому незастосовні до абстрактних множин: додавання, добуток, множення числа на мультимножину.

Розглянуто властивості введених операцій: характеристика відношення включення мультимножин у термінах операцій перетину та об’єднання мультимножин; ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, закони поглинання, аналоги законів подвійного заперечення та де Моргана.

Можливі наступні застосування отриманих результатів: мультимножини дозволяють уточнювати таблиці з дублікатами рядків, а операції над таблицями в SQL-подібних мовах уточнюються операціями над мультимножинами [50, 72]. Відповідність між маніпуляціями над таблицями та операціями над мультимножинами є наступною:

1) UNION ALL – $+_{All}$;
2) INTERSECT ALL – $\bigcap_{All}$;
3) MINUS ALL – $\setminus_{All}$;
4) DISTINCT UNION – $+_{1}$;
5) DISTINCT INTERSECT – $\bigcap_{1}$;
6) DISTINCT MINUS – $\setminus_{1}$.

Таким чином, отримана в цьому розділі низка співвідношень між операціями над мультимножинами може використовуватися в оптимізаційних блоках процесорів SQL-подібних мов.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити наступні висновки:

1) властивості операцій над мультимножинами є наслідками властивостей теоретико-числових функцій $\min$, $\max$, зрізаної різниці, взяття модуля;
2) операції додавання, перетину, різниці, з врахуванням та без врахування дублікатів, є природними уточненнями аналогів теоретико-множинних операцій над таблицями.

РОЗДІЛ 3

СТРУКТУРА ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНОГО СІМЕЙСТВА МУЛЬТИМНОЖИН

Розділ присвячено побудові решітки та повної решітки мультимножин.

3.1. Побудова решітки мультимножин

Побудову решітки мультимножин почнемо з побудови верхньої та нижньої піврешіток. Для цього розглянемо наступні властивості операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$.

Лема 3.1 (ідемпотентність, комутативність та асоціативність операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$). Операції $\bigcup_{All}$ та $\bigcap_{All}$

- ідемпотентні: $\alpha \bigcup_{All} \alpha = \alpha$, $\alpha \bigcap_{All} \alpha = \alpha$;
- комутативні: $\alpha \bigcup_{All} \beta = \beta \bigcup_{All} \alpha$, $\alpha \bigcap_{All} \beta = \beta \bigcap_{All} \alpha$;
- асоціативні: $\alpha \bigcup_{All} (\beta \bigcup_{All} \gamma) = (\alpha \bigcup_{All} \beta) \bigcup_{All} \gamma$,
  $\alpha \bigcap_{All} (\beta \bigcap_{All} \gamma) = (\alpha \bigcap_{All} \beta) \bigcap_{All} \gamma$.□

Доведення. ■ Розглянемо спочатку операцію $\bigcup_{All}$. Ідемпотентність операції $\bigcup_{All}$ випливає з її означення та очевидної ідемпотентності теоретико-числової функції $\max$.

Комутативність операції $\bigcup_{All}$ випливає з її означення та очевидної комутативності функції $\max$.

Аналогічним чином асоціативність операції $\bigcup_{All}$ випливає із асоціативності функції $\max$: $\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z)$.▪

■ Аналогічним чином доводиться ідемпотентність, комутативність та асоціативність операції $\bigcap_{All}$ із заміною $\max$ на теоретико-числову операцію $\min$.▪□

Таким чином, можна сказати, що властивості ідемпотентності, комутативності та асоціативності операцій об‘єднання (перетину) мультимножин є наслідками однойменних властивостей операції взяття максимуму (відповідно мінімуму).

Розглянемо наступну лему 3.2 про виконання законів поглинання для операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$.

Лема 3.2 (закони поглинання для операцій об'єднання $\bigcup_{All}$ та перетину $\bigcap_{All}$). Для довільних мультимножин α і β виконуються наступні закони поглинання $\alpha \bigcap_{All} (\alpha \bigcup_{All} \beta) = \alpha$, $\alpha \bigcup_{All} (\alpha \bigcap_{All} \beta) = \alpha$.□

Доведення. ■ Розглянемо спочатку перший закон поглинання. Використовуючи означення операцій $\bigcup_{All}$ та $\bigcap_{All}$, перепишемо цей закон у термінах характеристичних функцій (з огляду на твердження 2.1):

$$\min(\chi_\alpha(d), \max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))) = \chi_\alpha(d), \forall d \in D.$$

Остання рівність є частковим випадком рівності $\min(x, \max(x, y)) = x$, яка перевіряється безпосередньо. Дійсно, розглянемо можливі випадки:

1) якщо $x < y$, тоді $\min(x, \max(x, y)) = \min(x, y) = x$;

2) якщо $y < x$, тоді $\min(x, \max(x, y)) = \min(x, x) = x$;

3) якщо $x = y$, тоді $\min(x, \max(x, y)) = x$.▪

■ Другий закон поглинання доводиться повністю аналогічним чином.▪□

Таким чином, закони поглинання для операцій $\bigcup_{All}$ та $\bigcap_{All}$ є простими наслідками таких самих законів для теоретико-числових функцій $\max$ та $\min$.

Виходячи з леми 3.1, можна розглядати дві комутативні ідемпотентні напівгрупи $\langle \mathrm{M}, \bigcup_{All} \rangle$ и $\langle \mathrm{M}, \bigcap_{All} \rangle$, де М – сім'я мультимножин (відповідного універсума D).

Використовуючи добре відомий результат теорії решіток (див., наприклад, [76, § 8, с. 151, теорема 1]), можна напівгрупу за об'єднанням перетворити у верхню піврешітку, а напівгрупу за перетином – у нижню. Часткові порядки верхньої та нижньої піврешіток задаються відповідно наступними визначеннями:

$$\alpha \mathrel{\bar{\le}} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcup_{All} \beta = \beta \,,\; \alpha \mathrel{\bar{\trianglelefteq}} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcap_{All} \beta = \alpha \,,$$

причому $\sup_{\bar{\le}}\{\alpha,\beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\bar{\trianglelefteq}}\{\alpha,\beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$.

Можна безпосередньо перевірити або використати твердження 2.16–2.17, що ці порядки співпадають із порядком включення мультимножин $\preceq$. Отже, встановлено теорему 3.1.

Теорема 3.1. Частково впорядкована множина $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ є решіткою, причому $\sup_{\preceq}\{\alpha,\beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\preceq}\{\alpha,\beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$.□

Такий спосіб побудови решітки мультимножин явно не використовував закони поглинання. Покажемо, у загальному випадку, роль законів поглинання у побудові решітки за двома комутативними ідемпотентним напівгрупам з однаковим носієм, сигнатурні операції яких зв'язані законами поглинання.

Розглянемо дві комутативні ідемпотентні напівгрупи з однаковими носіями $\langle A, + \rangle$ та $\langle A, \cdot \rangle$, де A – деяка абстрактна множина.

Використовуючи відомий класичний результат теорії решіток про зв'язок комутативних ідемпотентних напівгруп та піврешіток (півструктур) [76, § 8, с. 151, теорема 1], напівгрупу $\langle A, + \rangle$ можна перетворити у верхню піврешітку, а напівгрупу $\langle A, \cdot \rangle$ – у нижню. Відповідні часткові порядки верхньої та нижньої піврешіток задаються виразами $a \le b \Leftrightarrow a + b = b$, $a \triangleleft b \Leftrightarrow ab = a$, причому $\sup_{\le}\{a,b\} = a + b$, $\inf_{\triangleleft}\{a,b\} = ab$. Відмітимо, що відповідно до стандартних узгоджень [64, 76], знак " $\cdot$ " у виразах опускається.

Теорема 3.2 (критерій збігу порядків верхньої та нижньої піврешіток). Часткові порядки верхньої та нижньої піврешіток співпадають тоді й тільки тоді, коли виконуються закони поглинання.□

Доведення. ■ Спочатку доведемо необхідність. Якщо порядки співпадають, то задана частково впорядкована множина (далі ч.в.м.) є одночасно і верхньою, і нижньою піврешіткою, отже, є решіткою. Для решіток закони поглинання виконуються [64, 77].▪

■ Доведемо достатність. Для цього необхідно показати, що виконується еквівалентність: $\forall\, a,b \;\; a+b=b \Leftrightarrow ab=a$.

Припустимо, що рівність $a+b=b$ виконується. Тоді $ab=a\,(a+b)$. За першим законом поглинання $a\,(a+b)=a$, тому $ab=a$.

Аналогічним чином, зробимо припущення, що $ab=a$. У цьому випадку $a+b=ab+b$. За другим законом поглинання $ab+b=b$, отже, $a+b=b$.▪□

Отриманий загальний результат можна застосовувати для побудови решітки мультимножин. Для цього необхідно впевнитись у виконанні законів поглинання: $\alpha \cap_{All} (\alpha \cup_{All} \beta) = \alpha$ і $\alpha \cup_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = \alpha$, про що і говорить лема 3.2.

3.2. Побудова повної решітки мультимножин

Наведемо більш інформативні результати про структуру частково впорядкованого сімейства мультимножин.

Спочатку розглянемо ч.в.м $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$, де М – сім'я мультимножин відповідного універсума D із порядком включення, та ч.в.м. характеристичних функцій $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd \rangle$. Порядок $\lhd$ визначається наступним чином: $\chi_\alpha \lhd \chi_\beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d\, \left(d \in D \Rightarrow \chi_\alpha(d) \le \chi_\beta(d)\right)$. Зауважимо, що друга ч.в.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd \rangle$ є прямим добутком множини натуральних чисел N із стандартним порядком $\le$, тобто $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\} = \prod_{d \in D} N$[2]. Із твердження 2.2 випливає, що ці ч.в.м. ізоморфні. Таким чином, структура ч.в.м.

[2] Означення прямого добутку ч.в.м. див., наприклад, у [62, 77].

$\langle\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd\rangle$ збігається зі структурою ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq\rangle$. У свою чергу, властивості ч.в.м. $\langle\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd\rangle$ випливають із властивостей ч.в.м. $\langle N, \leq\rangle$, що успадковуються при прямому добутку.

Твердження 3.1 (структура ч.в.м. мультимножин). Виконуються наступні твердження:

1) порожня мультимножина $\varnothing_m$ (її характеристична функція є константною функцією, яка всюди дорівнює нулю) − найменший елемент в $\langle \mathrm{M}, \preceq\rangle$;

2) $\inf \mu = \alpha$ для довільної непорожньої множини мультимножин $\mu \subseteq \mathrm{M}$; тут характеристична функція точної нижньої грані (інфімуму) α задається виразом $\chi_\alpha(d) = \min\limits_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$;

3) для довільної, зокрема, порожньої сім'ї мультимножин μ:

точна верхня грань (супремум) μ існує $\Leftrightarrow$ μ обмежено зверху;

4) $\sup \mu = \alpha$, де μ − довільна сім'я мультимножин, яка має точну верхню грань, а характеристична функція мультимножини α задається виразом $\chi_\alpha(d) = \max\limits_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$.□

Доведення. Окремо розглянемо кожне з наведених вище тверджень.

1) ■ Найменшим елементом ч.в.м. $\langle N, \leq\rangle$ є число 0. Відповідно, найменшим елементом ч.в.м. характеристичних функцій $\langle\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd\rangle$ буде функція, яка всюди дорівнює нулю. Виходячи з того, що $\langle\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{M}\}, \lhd\rangle$ ізоморфна ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq\rangle$, отримуємо, що найменшим елементом другої ч.в.м. буде порожня мультимножина $\varnothing_m$. Відмітимо, що інфімум порожньої сім'ї мультимножин не існує, так як у ч.в.м, що розглядається, не існує найбільшого елементу[3].▪

[3] Зауважимо, що за стандартними домовленостями, інфімум порожньої множини співпадає з найбільшим елементом ч.в.м., а супремум – з найменшим (звісно, за умови, існування цих елементів) (див., наприклад, [28]).

2) ■ Доведення другого твердження випливає із відомої формули знаходження інфімуму множини функцій (див., наприклад, [51] або [54]) і того факту, що ч.в.м. $\langle N, \leq \rangle$ є цілком впорядкованою.▪

3) ■ Супремум підмножини L ч.в.м. $\langle N, \leq \rangle$ існує тоді й тільки тоді, коли множина L – обмежена зверху. Цей результат можна перенести на ч.в.м. характеристичних функцій, а, як наслідок, й на ізоморфну ч.в.м. мультимножин. Отже, супремум довільної підмножини μ ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ існує, тоді й тільки тоді, коли ця підмножина обмежена зверху.▪

4) ■ Доведення цього твердження також випливає з відомої формули знаходження супремуму множини функцій (див., наприклад, [51] або [54]) за умови, що супремум існує.▪□

Таким чином, відповідно до твердження 3.1, ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ має найменший елемент (порожню мультимножину – $\varnothing_m$) і довільна її підмножина, обмежена зверху, має точну верхню грань. Отже, дотримуючись термінології робіт [6, розд. 3, п. 3.19, с. 58] та [20, розд. V, § 3, с. 153], ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ є одночасно умовно повною множиною та повною піврешіткою (complete semilattice) (див. також [28]). Таким чином, встановлена теорема 3.3.

Теорема 3.3. Ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ є умовно повною множиною та повною піврешіткою, при цьому точні грані знаходять відповідно до формул твердження 3.1.□

Доведення випливає з означень умовно повної множини та повної піврешітки, а також твердження 3.1.□

Поповнимо частково впорядковану множину $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ найбільшим елементом T. Отриману ч.в.м. позначимо через $\langle \mathrm{M} \cup \{\mathrm{T}\}, \preceq \rangle$.

Наслідок 3.1. Ч.в.м. $\langle \mathrm{M} \cup \{\mathrm{T}\}, \preceq \rangle$ є повною решіткою з найменшим елементом $\varnothing_m$ та найбільшим елементом T.□

Доведення приводиться явним чином; крім того, можна використати загальний результат теорії решіток про побудову повної решітки поповненням найбільшим та найменшим елементом [20, розд. V, § 3, с. 153].□

Ч.в.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ можна також вкласти в іншу повну решітку. Для цього розширимо поняття мультимножини.

Із цією метою поповнимо множину натуральних чисел без нуля N^{+} зі стандартним порядком найбільшим елементом ∞ та покладемо $N_{\infty}^{+} = N^{+} \bigcup \{\infty\}$. Під мультимножиною будемо розуміти функцію вигляду $\alpha : U_{\alpha} \to N_{\infty}^{+}$. Сім'ю усіх таких мультимножин позначимо через M_{∞}. Порядок на множині N_{∞}^{+} позначимо через $\leq_{\infty}$, тоді порядок на мультимножинах $\preceq$ розширимо так: $\alpha \preceq_{\infty} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} U_{\alpha} \subseteq U_{\beta} \ \& \ \forall d \ (d \in U_{\alpha} \Rightarrow \alpha(d) \leq_{\infty} \beta(d))$, $\alpha, \beta \in \mathrm{M}_{\infty}$. Зауважимо, що по суті порядки $\preceq$, $\preceq_{\infty}$ будуються прямим добутком ч.в.м. $\langle N, \leq \rangle$ та $\langle N_{\infty}, \preceq_{\infty} \rangle$ відповідно, де $N_{\infty} = N \bigcup \{\infty\}$, ∞ − найбільший елемент.

Теорема 3.4. Ч.в.м. $\langle \mathrm{M}_{\infty}, \preceq_{\infty} \rangle$ є повною решіткою з найменшим елементом $\varnothing_{m}$ та найбільшим елементом T_{∞}, де $\mathrm{T}_{\infty} : D \to \{\infty\}$, $\mathrm{T}_{\infty}(d) = \infty$ для всіх $d \in D$. Точні нижні грані знаходять за формулами твердження 3.1. Для точних верхніх граней виконується формула $\sup \mu = \alpha$, де характеристична функція мультимножини α така − $\chi_{\alpha}(d) = \sup\limits_{\leq_{\infty}, \beta \in \mu} \chi_{\beta}(d)$.□

Доведення. Загальновідомо, що $\langle N_{\infty}, \preceq_{\infty} \rangle$ є повною решіткою. Застосуємо відомий факт про те, що прямий добуток повних решіток буде повною решіткою, та використаємо формулу, яка вже неодноразово згадувалася раніше, для знаходження точних граней підмножини прямого добутку.□

3.3. Застосування отриманих результатів

Повну решітку мультимножин, побудовану узагальненням поняття мультимножини, можна використовувати для задання денотаційної семантики рекурсивних CTE-запитів у сучасних SQL-подібних мовах.

Розглянемо опис семантики оператора CTE (Common Table Expression). Спочатку зробимо декілька зауважень загального порядку.

Засоби задання семантики об'єктів різноманітних предметних областей можна розділити на явні (конотативні, операційні) та неявні (денотативні). Явні засоби задання характеризуються наявністю ефективних процедур задання, тоді як у неявних засобах задання об'єкти визначаються за допомогою специфікації їхніх властивостей.

Денотативні засоби задання є досить потужними та зручними у застосуванні. В математиці та інформатиці ці засоби подаються у вигляді методу нерухомої точки. У цьому випадку об'єкти задаються як найменші, відносно певного порядку, рішення рівнянь виду $x = F(x)$, $x \in D$, де D – частково впорядкована множина певного класу.

Конкретизуючи питання щодо денотаційної семантики CTE-виразів, приходимо до розгляду рівняння виду: $x = t +_{All} F(x)$, де t – таблиця-параметр (початкове наближення, початковий стан); F – функція над таблицями, що є семантикою відповідної частини CTE-запиту; область значень невідомого x – множина таблиць, що уточнюються як скінченні мультимножини, основами яких виступають множини рядків однієї схеми.

У загальному випадку це рівняння може не мати розв'язку в класі скінченних таблиць. Зауважимо, що функція F повинна зберігати порожню таблицю та бути дистрибутивною відносно операції $+_{All}$ [32].

Якщо зняти вимогу скінченності для основ та кількості дублікатів (розмірності та потужності мультимножини) у таблицях, то при вказаних достатніх умовах на праву частину даного рівняння, це рівняння завжди буде мати найменший розв'язок виду: $\underset{i=0,1,\ldots}{+_{All}} t_i$, де $t_0 \overset{def}{=} t$, а $t_{i+1} \overset{def}{=} t +_{All} F(t_i)$ [51].

Повна решітка мультимножин, яка отримана зняттям обмежень скінченності, саме і призначена для обґрунтування цих конструкцій.

У третьому розділі побудовано решітку мультимножин за частковим порядком включення. Ця решітка відповідає абстрактній решітці (за термінологією [64]) із сигнатурними операціями $\bigcup_{All}$, $\bigcap_{All}$.

Отримано результат загальної теорії решіток відносно ролі законів поглинання при побудові решітки за абстрактною решіткою.

З'ясовано структуру ч.в.м. мультимножин за відношенням включення: виявляється, що дана ч.в.м є умовно повною множиною та повною піврешіткою (complete semilattice) одночасно; вказано формули для обох точних граней.

Здійснено вкладення ч.в.м. мультимножин у дві повні решітки, при цьому одна з цих повних решіток будується шляхом узагальнення поняття мультимножини знаттям вимоги скінченності основ та кількості екземплярів елементів основ[4].

Отримані результати застосовано для аналізу денотаційної семантики рекурсивної форми CTE-запитів сучасних SQL-подібних мов.

Із отриманих результатів випливають наступні висновки:

1) відношення включення мультимножин є природнім;
2) відповідна ч.в.м. відноситься до відомих класів ч.в.м.: решітки, умовно повні множини, повні піврешітки;
3) решітка мультимножин допускає два простих та природних вкладення у повні решітки;
4) повна решітка, отримана зняттям вимог скінченності основ та кількості екземплярів елементів основ, використовується при розгляді рівняння, яке задає денотаційну семантику рекурсивної форми CTE-запитів SQL-подібних мов.

[4] З приводу інших узагальнень мультимножин див. [17].

РОЗДІЛ 4

ОБЧИСЛЮВАНІСТЬ НА СКІНЧЕННИХ МНОЖИНАХ ТА МУЛЬТИМНОЖИНАХ

4.1. Основні означення теорії примітивних програмних алгебр

Уперше примітивні програмні алгебри (ППА) було введено В.Н. Редьком у роботах [71, 73] як адекватний апарат для розв'язування проблем повноти в різних класах функцій, тобто для завдання класів функцій як замикань у цих алгебрах.

Головна особливість сигнатурних операцій ППА полягає в їх загальнозначності та абстрактності: операції, по-перше, використовують тільки властивості бути функцією чи предикатом і, по-друге, інваріантні відносно природи множини, якій належать аргументи та значення функцій (на відміну від операцій класичної теорії рекурсії типу мінімізації, примітивної рекурсії чи операцій типу словарної рекурсії та словарної мінімізації [66, розд. V, §11, п. 11.2]). Конкретні дослідження показали доцільність використання ППА для завдання різноманітних класів обчислюваних функцій. Так, розглядалися наступні універсуми даних: натуральні, цілі та раціональні числа [42, 41, 26]; слова в скінченному алфавіті [41]; вектори, матриці, реляції, таблиці, компоненти яких належать множині натуральних чисел чи деякій скінченній множині[5] [40, 44, 56, 57]. Характерна особливість вказаних результатів полягає у тому, що були знайдені не просто скінченні системи породжуючих (скінченні з точністю до селекторних функцій), а системи породжуючих, що містять прості природні функції та предикати [51].

---

[5] Іншими словами, йдеться мова про названі структури даних в скінченному чи ефективно зліченому алфавітах.

Наведемо основні означення теорії ППА. Носієм такої алгебри виступає множина багатомісних часткових функцій та предикатів, а сигнатура складається із операцій параметричної суперпозиції функції у функцію (предикат) $S^{(m+1)}$, $m = 1,2,...$, тернарного розгалуження функцій (предикатів) за предикатом $\Diamond^{(3)}$ та параметричного циклування функцій за предикатом $*^{(n+1)}$, $n = 1,2,...$

Функції будемо позначати маленькими латинськими літерами f, g, h, а предикати – p, q. Будемо використовувати літери φ, ψ, Φ, Ψ, якщо не важливо, функції чи предикати використовуються. Арність φ будемо позначати через $\nu\varphi$.

Операція суперпозиції (функцій у функцію або у предикат) визначається як $S^{(m+1)}(\varphi, f_1,..., f_m) = \phi^{(n)}$, де $\phi(x_1,...,x_n) \simeq \varphi(f_1(x_1,...,x_n),..., f_m(x_1,...,x_n))$ у припущенні, що для арностей виконується рівності $\nu\varphi = m,\ \nu f_1 = ... = \nu f_m = \nu\phi = n$ (див. рис. 4.1). Тут і далі $\simeq$ − узагальнена рівність (сильна рівність Кліні).

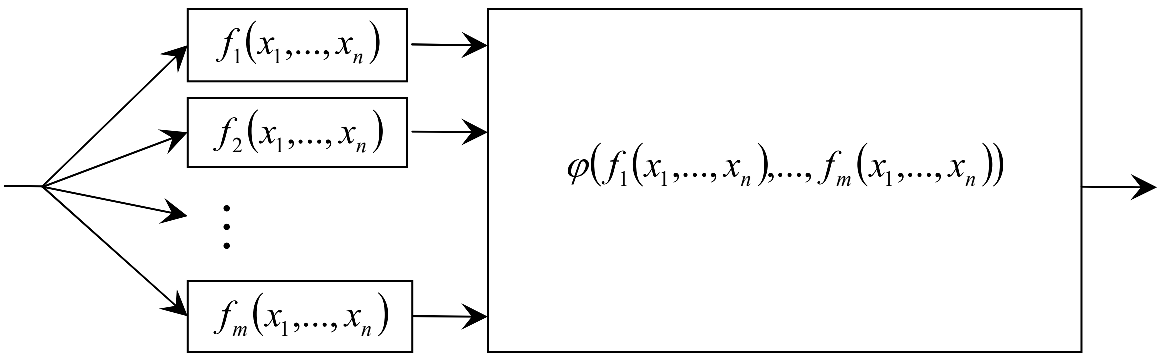

Рис. 4.1. Схематичне означення операції суперпозиції функцій у функцію (предикат)

Операція розгалуження (двох функцій за предикатом або двох предикатів за предикатом) $\Diamond^{(3)}$ визначається наступним чином: $\Diamond^{(3)}\left(p^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}\right) = \phi^{(n)}$, де $\varphi_1^{(n)}$, $\varphi_2^{(n)}$ одночасно функції або предикати, а $\phi^{(n)}$ задається кусковою схемою:

$$\phi(x_1,.., x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_1^{(n)}(x_1,...,x_n), \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq T, \\ \varphi_2^{(n)}(x_1,...,x_n), \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq F, \\ \text{невизначено, інакше.} \end{cases}$$

Припускаємо, що $\nu p = \nu\varphi_1 = \nu\varphi_2 = \nu\phi = n$ (див. рис. 4.2). Таким чином, розгалуження функцій за предикатом є функція, а розгалуження предикатів за предикатом є предикат.

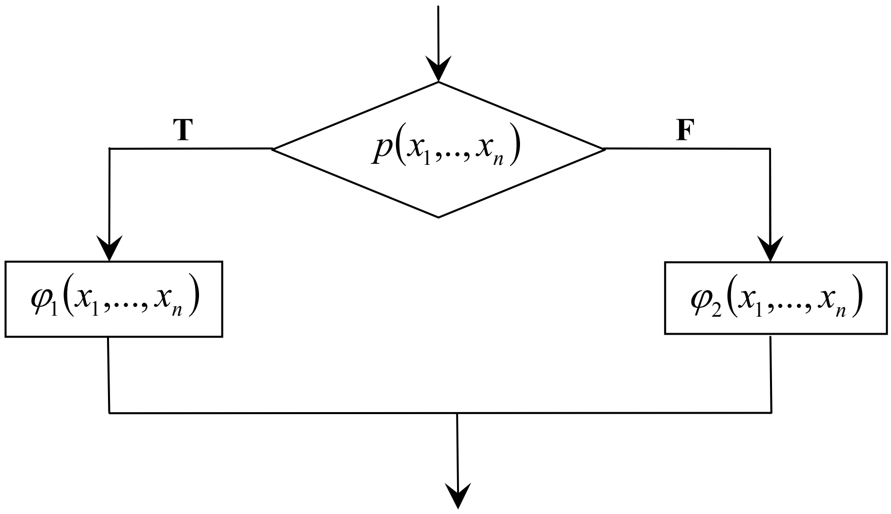

Рис. 4.2. Схематичне означення операції розгалуження функцій (предикатів) за предикатом

Параметрична операція циклування функцій за предикатом має наступне означення: $*^{(n+1)}\left(p^{(n)}, f_1^{(n)},..., f_n^{(n)}\right) = g^{(n)}$, де $\nu p = \nu f_1 = ... = \nu f_n = \nu g = n$. Для задання значення $g^{(n)}(x_1,...,x_n)$ задамо n послідовностей $\{x_i^j\}_{i=1,2,...,n}^{j=0,1,...}$ індукцією за $j = 0,1,...$. Базис: $x_i^0 = x_i$, $i = 1,..,n$; індуктивний крок: $x_i^{j+1} \simeq f_i^{(n)}\left(x_1^j,...,x_n^j\right)$, $j = 0,1,...$, $i = 1,..,n$. Значення функції $g^{(n)}(x_1,...,x_n)$ визначають як x_1^j, де $j = 0,1,...$ таке мінімальне значення, для якого $p^{(n)}\left(x_1^j,...,x_n^j\right) \simeq F$ (за умови визначення усіх попередніх значень x_i^l, $p^{(n)}\left(x_1^l,...,x_n^l\right)$, $i = 1,..,n$, $l < j$).

Тобто, використовуючи запис оператора мінімізації теорії рекурсії, маємо узагальнену рівність $g^{(n)}(x_1,...,x_n) \simeq x_1^k$, де $k \simeq \mu_j\left(p^{(n)}\left(x_1^j,...,x_n^j\right) \simeq F\right)$ (див. рис. 4.3).

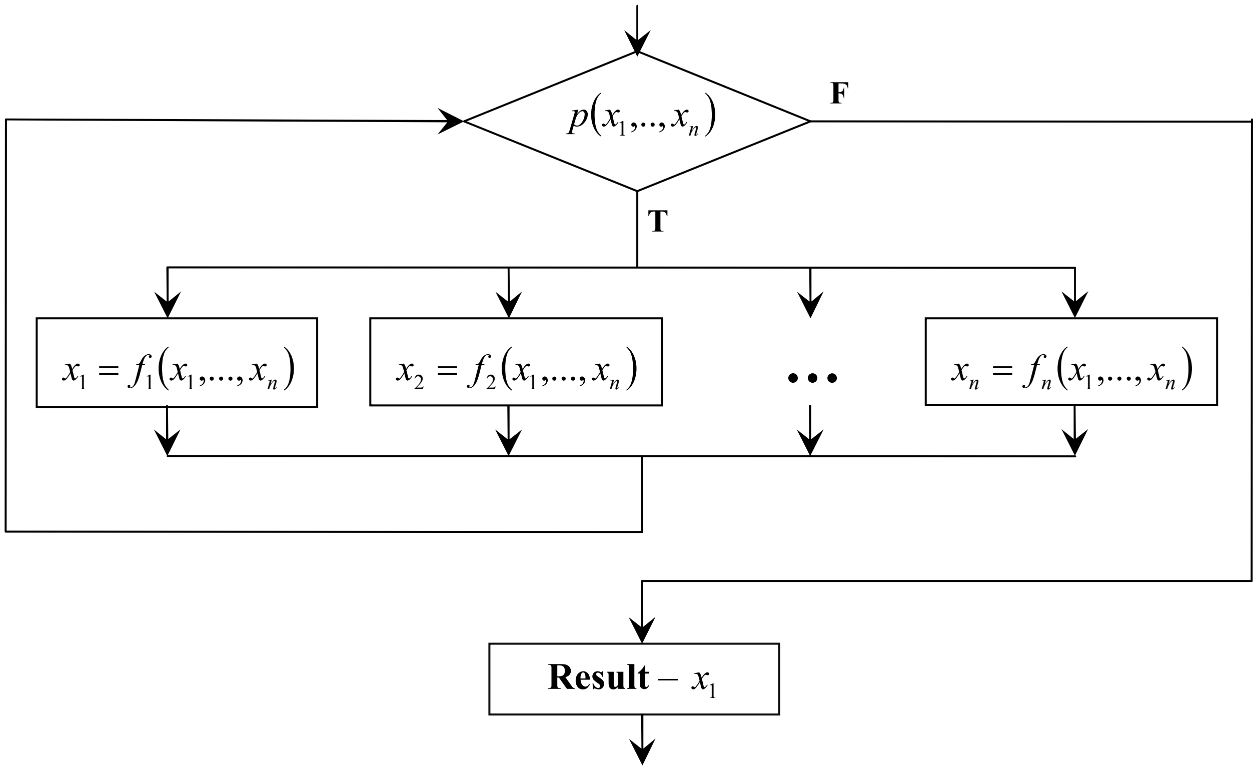

Рис. 4.3. Схематичне означення операції циклування

Торкнемося питання повноти класів обчислюваних функцій, що зберігають денотати, у різних оцінених універсумах [27, 44, 53]. Оскільки класи таких функцій та обчислюваних предикатів замкнені відносно сигнатурних операцій ППА, то ці алгебри і виступають природним інструментом розв'язання проблем повноти: в точних термінах йдеться мова про пошук систем породжуючих відповідних ППА.

Щодо конкретних класів функцій та предикатів, то класифікація проводиться за універсумом та його оцінкою. У згаданих роботах були розглянуті універсуми векторів, матриць, реляцій і таблиць натуральних чисел. При цьому під реляціями розумілися скінченноарні відношення на множині натуральних чисел, а у таблицях явно вводилися до розгляду імена (атрибути за іншою термінологією). Остання обставина носить принциповий характер. Оцінки цих універсумів обиралися з огляду на уточнення маніпуляціних дій: оцінки зіставляють зазначеним структурам даних множини їхніх компонентів.

$$< a_1,...,a_n > \mapsto \{a_1,...,a_n\},\ \| a_{ij} \|_{mn} \mapsto \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}},$$

$$\{<a_1^i,...,a_n^i>\}_{i=\overline{1,m}} \mapsto \{a_j^i\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}},\ t \mapsto \{s(A) \mid s \in t \,\&\, A \in R\},$$

де для останнього випадку таблиць через R позначена схема таблиці t – однакова область визначення всіх рядків s, які утворюють таблицю [51].

Цю проблематику можна досліджувати стосовно універсуму мультимножин. Найпростіша та природна оцінка – співставлення мультимножині її основи; але ця тематика потребує окремого розгляду.

4.2. Арифметична примітивна програмна алгебра

У роботах [42, 43] побудовано повну систему (систему породжуючих) арифметичної ППА σ_N, яка складається із предикату $x < y$, функції слідування $s(x)$, функції додавання $x + y$, функції множення $x \cdot y$, селекторів I_m^n, $n = 1,2,...$, $m = 1,2,...,n$ та константної функції $0(x)$, фіксуючої 0:

$$\sigma_N = \left\{ x < y, s(x), x + y, x \cdot y, I_m^n, 0(x) \right\}_{\substack{n=1,2,... \\ m=1,2,...,n}}.$$

Для проведення побудов в ППА зручно користуватися операціями заперечення $\neg p$, кон'юнкції $p \wedge q$ та диз'юнкції $p \vee q$ предикатів. Ці операції отримуються суперпозиціями відповідно у булеве заперечення $\neg$, кон'юнкцію $\wedge$ та диз'юнкцію $\vee$. Наведемо формальні означення.

$\neg p \overset{def}{=} S^{(2)}(\neg, p)$. Таким чином, $dom\, \neg p = dom\ p$, $\neg p(x_1,...,x_n) \simeq \neg(p(x_1,...,x_n))$, $\nu p = n$.

$p \wedge q \overset{def}{=} S^{(3)}(\wedge, p, q)$. Отже, $dom\ p \wedge q = dom\ p \bigcap dom\ q$, $(p \wedge q)(x_1,...,x_n) \simeq p(x_1,...,x_n) \wedge q(x_1,...,x_n)$, $\nu p = \nu q = n$. Із цих означень випливає наступна кускова схема:

$$(p \wedge q)(x_1,...,x_n) \simeq \begin{cases} T, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq T \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq T \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq F, \\ F, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq F \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq F \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq F, \\ \text{невизначено, якщо } (x_1,...,x_n) \notin dom\ p \text{ або } (x_1,...,x_n) \notin dom\ q. \end{cases}$$

$p \vee q \overset{def}{=} S^{(3)}(\vee, p, q)$. Таким чином, $dom\ p \vee q = dom\ p \bigcap dom\ q$, $(p \vee q)(x_1,...,x_n) \simeq p(x_1,...,x_n) \vee q(x_1,...,x_n)$, $\nu p = \nu q = n$. Із цих означень випливає наступна кускова схема:

$$(p \vee q)(x_1,...,x_n) \simeq \begin{cases} T, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq T \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq T, \\ T, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq T \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq F, \\ T, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq F \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq T, \\ F, \text{ якщо } p(x_1,...,x_n) \simeq F \ \& \ q(x_1,...,x_n) \simeq F, \\ \text{невизначено, якщо } (x_1,...,x_n) \notin dom\ p \text{ або } (x_1,...,x_n) \notin dom\ q. \end{cases}$$

Покажемо, яким чином ці операції над предикатами моделюються у ППА. Нижче, $p_F(x)$, $p_T(x)$ – унарні константні предикати, що фіксують булеві значення F, T відповідно. Для предикату $p_T(x)$ має місце наступне зображення у довільній ППА: $p_T(x) = S^{(3)}(=, I_1^1, I_1^1)$ або у термальній формі $p_T(x) = x = x$. Що стосується предикату $p_F(x)$, то в арифметичній ППА для нього має місце таке зображення: $p_F(x) = S^{(3)}(=, \overline{0}, \overline{1})$ або, використовуючи термальну форму запису, $p_F(x) = 0(x) = 1(x)$.

Для заперечення предикату має місце наступна рівність:

$$\neg p(x_1,...,x_n) = \Diamond^{(3)}(p(x_1,...,x_n), p_F(x_1), p_T(x_1)).$$

Для операції коню'нкції предикатів має місце рівність:

$$(p \wedge q)(x_1,...,x_n) =$$
$$= \Diamond^{(3)}\big(p(x_1,...,x_n), \Diamond^{(3)}(q(x_1,...,x_n), p_T(x_1), p_F(x_1)), \Diamond^{(3)}(q(x_1,...,x_n), p_F(x_1), p_F(x_1))\big).$$

Для операції диз'юнкції предикатів має місце рівність:

$$(p \vee q)(x_1,...,x_n) =$$
$$= \Diamond^{(3)}\big(p(x_1,...,x_n), \Diamond^{(3)}(q(x_1,...,x_n), p_T(x_1), p_T(x_1)), \Diamond^{(3)}(q(x_1,...,x_n), p_T(x_1), p_F(x_1))\big).$$

Наступні три леми стосуються побудови іншої системи породжуючих арифметичної ППА $\sigma'_N = \left\{ x = y, x + y, I_m^n, 0(x), 1(x) \right\}_{\substack{n=1,2,\dots \\ m=1,\dots n}}$ на основі системи породжуючих σ_N. Система σ'_N є більш зручною з технічних причин для моделювання обчислювальних арифметичних функцій та предикатів у множинній ППА.

Повнота системи σ'_N випливає з того, що всі елементи повної системи σ_N можна побудувати із елементів системи σ'_N. Саме ці факти й встановлюють наступні три леми.

Лема 4.1. Функція слідування $s(x)$ та предикати $p_T(x)$, $p_F(x)$ будуються із елементів системи σ'_N суперпозиціями.□

Доведення. У термальній формі запису маємо: $s(x) = x + 1(x)$. Щодо операторної форми запису, то очевидно, що $s = S^{(3)}\left(+, I_1^1, S^{(2)}\left(\overline{1}, I_1^1\right)\right)$, де $\overline{1}$ – унарна константна функція, що фіксує 1 (термальна форма запису цієї функції $1(x)$).

Побудова предикатів була проведена вище.□

Зробимо зауваження про використання термальної форми запису функцій та предикатів при побудовах в ППА. Загальновідомо [65, 66], що при побудовах функцій суперпозиціями можна використовувати операторні та термальні форми запису. При цьому від операторної форми запису можна переходити до термальної та навпаки. Оскільки в ППА використовуються також розгалуження та циклування, то домовимося про термальну форму запису для останніх двох операцій.

Нехай n-арні предикат p та функції (предикати) φ_1, φ_2 мають термальні форми запису $\theta(x_1,...,x_n)$, $\theta_1(x_1,...,x_n)$, $\theta_2(x_1,...,x_n)$ відповідно. Тоді, функція (предикат) $\Diamond\left(p, \varphi_1, \varphi_2\right)$ має термальне зображення вигляду $\Diamond\left(\theta(x_1,...,x_n), \theta_1(x_1,...,x_n), \theta_2(x_1,...,x_n)\right)$.

Нехай n-арні предикат p та функції $f_1,\ldots,f_n$ мають термальні форми запису $\theta(x_1,...,x_n)$, $\theta_1(x_1,...,x_n),\ldots,\theta_n(x_1,...,x_n)$ відповідно. Тоді, функція $*(p, f_1,...,f_n)$ має термальне зображення вигляду $(\theta(x_1,...,x_n))\underset{x_1,\ldots,x_n}{*}(\theta_1(x_1,...,x_n),...,\theta_n(x_1,...,x_n))$.

Лема 4.2. Функція множення $x \cdot y$ будується із елементів системи σ'_N у арифметичній ППА.□

Доведення. Нехай $f(x,y,z,t)\overset{def}{=}(y \neq z)\underset{t,\,z}{*}(t+x,\, z+1)$. Нескладно перевірити, що для множення виконується рівність: $x \cdot y = f(x, y, 0, 0)$.□

Лема 4.3. Предикат нерівності $x < y$ будується із елементів системи σ'_N у арифметичній ППА.□

Доведення. Нехай $f(x,y,z)\overset{def}{=}((x \neq y)\wedge(x \neq y+z))\underset{x}{*}(x+1)$ та $g(x,y)\overset{def}{=} f(x,y,x)$. Нескладно перевірити, що для останньої функції має місце наступна кускова схема:

$$g(n,m)=\begin{cases} m, \text{ якщо } n<m, \\ n+m, \text{ якщо } m<n, \end{cases}$$

де $n, m \in N$.

Використовуючи цю властивість функції g, можна перевірити наступне представлення предикату $x < y$:

$$x<y=\Diamond\left(x=y,\, p_F(x), \Diamond\left(x=0,\, p_T(x), \Diamond\left(g(x,y)=y,\, p_T(x),\, p_F(x)\right)\right)\right).\square$$

Лема 4.4. Система σ'_N є системою породжуючих арифметичної ППА та I_m^n-базисом. □

Тобто, без втрати властивості повноти із системи σ'_N не можна вилучити жодного елемента окрім, можливо, селекторів.

Доведення. ■ Із лем 4.1–4.3 випливає, що всі елементи повної системи σ_N будуються у арифметичні ППА із елементів системи σ'_N. Таким чином остання система повна.▪

■ Покажемо, що жодний елемент системи σ'_N, окрім, можливо, селекторів, не можна вилучити без втрати повноти системи.

1. Предикат $x = y$ не можна вилучити, бо він є єдиним предикатом у системі σ'_N. Для формального доведення треба використати наступну властивість розгалуження (суперпозиції): якщо розгалуження (суперпозиція) будує предикат, то всі три аргументи повинні бути предикатами (перший аргумент, в який здійснюється підстановка, повинен бути предикатом).

При розгляді решти функцій системи σ'_N будемо спиратися на замкненість класу функцій, що зберігають множину, та класу всіх предикатів відносно сигнатурних операцій ППА [40]. Нагадаємо, що за означенням n-арна функція f зберігає множину L, якщо для повного образу виконується $f[L \times \ldots \times L] \subseteq L$.

2. Константну функцію $0(x)$ не можна вилучати, бо це єдина функція, що не зберігає множину $\{x \mid x \geq 1\}$.
3. Константну функцію $1(x)$ не можна вилучати, бо це єдина функція, що не зберігає множину $\{0\}$.
4. Функцію додавання $x + y$ не можна вилучати, бо це єдина функція, що не зберігає множину $\{0, 1\}$.▪□

На рис. 4.4 наведено дерева побудови функцій слідування та множення, а також предикату рівності, всюди істинного і всюди хибного предикатів з елементів системи σ'_N згідно лем 4.1–4.3. Усі листки дерев – це елементи системи σ'_N. Це ілюструє повноту побудованої системи.

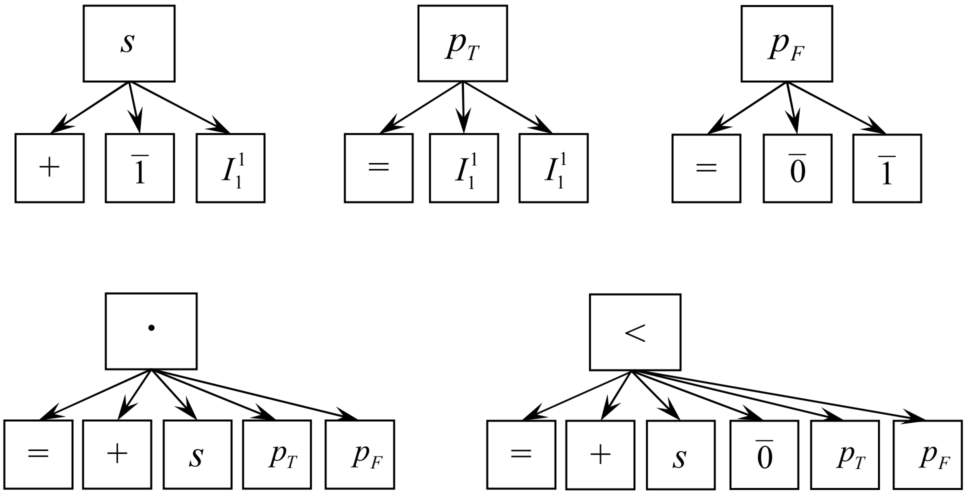

Рис. 4.4. Дерева побудови функцій та предикатів повної системи σ_N з елементів системи σ'_N

Наступна табл. 4.1 ілюструє доведення леми 4.4 щодо нескорочуваності повної системи σ'_N. Її стовпці відповідають функціям, а рядки – властивостям зберігання певної множини: комірка містить "–", якщо функція не зберігає множину, та "+" – в протилежному випадку.

Таблиця 4.1.

Збереження множин функціями системи σ'_N

Множини	Функції системи σ'_N			
	$0(x)$	$1(x)$	$x+y$	I_m^n
$\{x \mid x \geq 1\}$	–	+	+	+
$\{0\}$	+	–	+	+
$\{0, 1\}$	+	+	–	+

Зауважимо, що у таблиці присутні селекторні функції, проте їх можна було й не розглядати, адже селектори зберігають довільну множину.

4.3. Множинна примітивна програмна алгебра

Носієм множинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над скінченними множинами натуральних чисел. Сигнатура складається із тих самих операцій, що й в арифметичній ППА. Мета підрозділу полягає у побудові системи породжуючих множинної ППА.

До системи породжуючих множинної ППА Σ входять предикат рівності $X = Y$, функція об'єднання множин $X \bigcup Y$, функція додавання скінченних множин $X \oplus Y$, функція віднімання скінченних множин $X \div Y$, селекторні функції I_m^n та константні функції $\{1\}(X)$ і $\varnothing(X)$, що фіксують відповідно сінглтон $\{1\}$ та порожню множину на довільному аргументі:

$$\Sigma \stackrel{def}{=} \left\{X = Y,\, X \bigcup Y,\, X \oplus Y,\, X \div Y,\, \{1\}(X),\, \varnothing(X),\, I_m^n\right\}_{\substack{n=1,2,\dots \\ m=1,\dots,n}}.$$

Наведемо означення функцій $X \oplus Y$ і $X \div Y$.

$X \oplus Y \stackrel{def}{=} \{z \mid \exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x + y)\}$. Цю операцію також можна визначити через повний образ відносно стандартного додавання наступним чином: $X \oplus Y = +[X \times Y]$, тобто, в позначеннях роботи [29], $\oplus = [+]$.

$X \div Y \stackrel{def}{=} \{z \mid \exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x \dot{-} y)\}$, де операція зрізаної різниці визначається стандартно (див. напр. [58, 65, 66]). Аналогічним чином, як і у випадку операції додавання скінченних множин, мають місце рівності: $X \div Y = \dot{-}[X \times Y]$, $\div = [\dot{-}]$.

У термальних записах множинних функцій та предикатів предметні змінні позначимо великими літерами $X, Y, Z, \dots$ (у випадку арифметичних функцій та предикатів в цій ролі використовувалися маленькі літери).

4.3.1. Множинні функції (предикати), що представляють арифметичні функції (предикати)

Введемо означення представляючої функції та представляючого предикату, необхідних для моделювання арифметичних функцій (предикатів) множинними функціями (предикатами). Основна ідея полягає у представленні натурального числа n сінглтоном $\{n\}$. Множинні функції та предикати будемо позначати великими літерами.

Нехай $f^{(n)}$ – арифметична функція. Тоді функція $F^{(n)}$ представляє функцію $f^{(n)}$ (або $F^{(n)}$ – *представляюча функція* для функції $f^{(n)}$), якщо виконується $\forall\, x_1,...,x_n \left(\left\{f^{(n)}(x_1,...,x_n)\right\} \simeq F^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})\right)$.

Аналогічним чином, нехай $p^{(n)}$ – арифметичний предикат. Тоді предикат $P^{(n)}$ представляє предикат $p^{(n)}$ (або $P^{(n)}$ – *представляючий предикат* для предикату $p^{(n)}$), якщо $\forall\, x_1,...,x_n \left(p^{(n)}(x_1,...,x_n) \simeq P^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})\right)$.

У попередньому підрозділі було побудовано систему породжуючих σ'_N арифметичної ППА. Наступна лема дає відповідь щодо представляючих цієї системи.

Лема 4.5 (множинні представляючі елементів системи σ'_N). Представляючі для елементів системи σ'_N:

1) предикат $X = Y$ представляє предикат $x = y$;

2) функція $X \oplus Y$ представляє функцію $x + y$;

3) множинний селектор I_m^n представляє арифметичний селектор I_m^n;

4) $\{1\}(X)$ є представляючою функції $1(x)$.□

Доведення. Твердження щодо представляючих рівності, селекторів та константних функцій – очевидні. Те, що додавання скінченних множин представляє арифметичне додавання випливає з рівності $\{n\} \oplus \{m\} = \{n+m\}$, яка, в свою чергу, випливає з означення функції додавання множин.□

Розглянемо представляючі функцій (предикатів), які будуються операціями суперпозиції, розгалуження та циклювання.

Лема 4.6 (представляюча суперпозиції). Якщо множинні функції $F^{(m)}$, $F_1^{(n)},\ldots,F_m^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f^{(m)}$, $f_1^{(n)},\ldots,f_m^{(n)}$, то суперпозиція $S^{(m+1)}\left(F^{(m)},F_1^{(n)},\ldots,F_m^{(n)}\right)$ представляє суперпозицію $S^{(m+1)}\left(f^{(m)},f_1^{(n)},\ldots,f_m^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча суперпозиції функцій є суперпозицією представляючих.

Доведення. Розглянемо довільні натуральні числа $x_1,\ldots,x_n$. Тоді, за означенням представляючої функції, виконується ланцюжок узагальнених рівностей:

$$S^{(m+1)}\left(F^{(m)},F_1^{(n)},\ldots,F_m^{(n)}\right)\left(\{x_1\},\ldots,\{x_n\}\right)\simeq$$
$$\simeq F^{(m)}\left(F_1^{(n)}\left(\{x_1\},\ldots,\{x_n\}\right),\ldots,F_m^{(n)}\left(\{x_1\},\ldots,\{x_n\}\right)\right)\simeq$$
$$\simeq F^{(m)}\left(\left\{f_1^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\right\},\ldots,\left\{f_m^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\right\}\right)\simeq$$
$$\simeq\left\{f^{(m)}\left(f_1^{(n)}(x_1,\ldots,x_n),\ldots.,f_m^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\right)\right\}\simeq$$
$$\simeq\left\{S^{(m+1)}\left(f^{(m)},f_1^{(n)},\ldots.,f_m^{(n)}\right)(x_1,\ldots,x_n)\right\}.\square$$

Випадок суперпозиції функції в предикат розглядається аналогічним чином.

Лема 4.7 (представляюча розгалуження). Якщо множинні функції $F_1^{(n)}$, $F_2^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)},f_2^{(n)}$, а множинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то розгалуження $\Diamond^{(3)}\left(P^{(n)},F_1^{(n)},F_2^{(n)}\right)$ представляє розгалуження $\Diamond^{(3)}\left(p^{(n)},f_1^{(n)},f_2^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча розгалуження функцій за предикатом є розгалуженням представляючих функцій за предикатом, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Покажемо, що функція $\Psi^{(n)} = \lozenge^{(3)}\left(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)}\right)$ представляє функцію $\psi(x) = \lozenge^{(3)}\left(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}\right)$, тобто, що $\Psi^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\}) \simeq \{\psi^{(n)}(x_1,...,x_n)\}$ $\forall\, x_1,...,x_n$.

Розглянемо довільні натуральні $x_1,...,x_n$. Можливі тільки три випадки.

1. ■ Нехай значення арифметичного предикату $p^{(n)}(x_1,...,x_n)$ невизначене. Тоді невизначене буде й значення представляючого множинного предикату $P^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$. Так як значення $p^{(n)}(x_1,...,x_n)$ невизначене, то й значення функції $\psi(x_1,...,x_n)$ також буде невизначене. Аналогічним чином, невизначеним буде й значення функції $\Psi(\{x_1\},...,\{x_n\})$.▪
2. ■ Нехай значення арифметичного предикату $p^{(n)}(x_1,...,x_n)$ визначене та дорівнює T. Тоді значення $P^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$ визначене й також дорівнює T. Необхідно розглянути два випадки:
   - нехай значення функції $f_1^{(n)}(x_1,...,x_n)$ визначене, тоді визначене значення функції $\psi(x_1,...,x_n)$, яке дорівнює $f_1^{(n)}(x_1,...,x_n)$; з означення представляючої випливає, що визначене значення $F_1^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$, яке дорівнює $\{f_1^{(n)}(x_1,...,x_n)\}$; залишається врахувати, що $\Psi(\{x_1\},...,\{x_n\}) \simeq F_1^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$ в цьому випадку;
   - нехай значення функції $f_1^{(n)}(x_1,...,x_n)$ невизначене, тоді невизначене й значення функції $\psi(x_1,...,x_n)$; з означення представляючої випливає, що невизначеним буде й значення $F_1^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$, отже $\Psi^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\})$ також невизначене.▪
3. ■ Останній випадок, коли значення предикату $p^{(n)}(x_1,...,x_n)$ визначене і дорівнює F, зводиться до попереднього випадку, так як має місце загальнозначуща властивість розгалуження:

$$\lozenge^{(3)}\left(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}\right) = \lozenge^{(3)}\left(\neg p^{(n)}, f_2^{(n)}, f_1^{(n)}\right).▪$$

Таким чином, в усіх трьох можливих випадках виконується узагальнена рівність $\Psi^{(n)}(\{x_1\},...,\{x_n\}) \simeq \{\psi^{(n)}(x_1,...,x_n)\}$.□

Випадок розгалуження предикатів за предикатом розглядається повністю аналогічним чином.

Лема 4.8 (представляюча циклування). Якщо множинні функції $F_1^{(n)},...,\ F_n^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)},...,f_n^{(n)}$, а множинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то циклування $*^{(n+1)}\left(P^{(n)}, F_1^{(n)},...,\ F_n^{(n)}\right)$ представляє циклування $*^{(n+1)}\left(p^{(n)}, f_1^{(n)},..., f_n^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча циклування функцій за предикатом є циклуванням представляючих функцій за предикатом, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Нехай $g \overset{def}{=} *\left(p, f_1,..., f_n\right)$ та $G \overset{def}{=} *\left(P, F_1,..., F_n\right)$. Необхідно показати, що множинна функція G представляє арифметичну функцію g. Для цього розглянемо довільні натуральні числа $x_1,...,x_n$ і доведемо узагальнену рівність $G(\{x_1\},..., \{x_n\}) \simeq \{g(x_1,..., x_n)\}$.

Згідно з означення циклування розглянемо послідовності $\{x_i^j\}_{i=1,..,n}^{j=0,1,...}$, де $x_i^0 = x_i$, $x_i^{j+1} \simeq f_i(x_1^j,..., x_n^j)$, $i = 1,..., n$, $j = 0,1,...$. Ці послідовності потрібні для визначення значення $g(x_1,..., x_n)$. Аналогічним чином, для визначення значення $G(\{x_1\},..., \{x_n\})$ розглянемо послідовності $\{X_i^j\}_{i=1,..,n}^{j=0,1,...}$, де $X_i^0 = \{x_i\}$, $X_i^{j+1} \simeq F_i(X_1^j,..., X_n^j)$, $i = 1,..., n$, $j = 0,1,...$.

Індукцією за $j = 0,1,...$ встановимо узагальнену рівність $X_i^j \simeq \{x_i^j\}$ для всіх $i = 1,..., n$.

Базис індукції є очевидним. Проведемо індуктивний крок:

$$X_i^{j+1} \simeq F_i(X_1^j,..., X_n^j) \simeq F_i(\{x_1^j\},..., \{x_n^j\}) \simeq \{f_i(x_1^j,..., x_n^j)\} \simeq \{x_i^{j+1}\}.$$

Звідси випливає наступна узагальнена рівність для всіх $j = 0,1,...$:

$$P\left(X_1^j,..., X_n^j\right) \simeq p\left(x_1^j,..., x_n^j\right).$$

Дійсно, враховуючи, що множинний предикат P представляє арифметичний предикат p, маємо ланцюжок узагальнених рівностей:

$$P\left(X_1^j,..., X_n^j\right) \simeq P\left(\left\{x_1^j\right\},..., \left\{x_n^j\right\}\right) \simeq p\left(x_1^j,..., x_n^j\right).$$

Залишається використати означення циклування.□

Із останніх чотирьох лем безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.1. У множинній ППА із елементів системи Σ можна побудувати множинну представляючу довільної частково рекурсивної арифметичної функції.□

4.3.2. Нумерація сімейства скінченних множин натуральних чисел

Побудуємо нумерацію ξ скінченних множин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ' непорожніх множин натуральних чисел.

Нехай $M = \{n_1,..., n_m\}$, де $m \ge 1$, $n_1 < n_2 < ... < n_m$ – непорожня скінченна множина натуральних чисел. Покладемо, що $\xi'(M) \overset{def}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{n_2+1} \cdot ... \cdot p_{m-1}^{n_m+1}$.

Вище p_i, $i = 0, 1, 2, ...$ – i-те просте число згідно [65, 66] ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_3 = 5$,…).

Шукана нумерація ξ задається кусковою схемою:

$$\xi(M) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } M = \varnothing, \\ \xi'(M), \textit{інакше}, \end{cases}$$

де M – скінченна множина натуральних чисел. Сім’ю всіх скінченних множин натуральних чисел позначимо 2_{fin}^N.

Очевидно, що побудована нумерація ξ є ефективною в тому розумінні, що за довільним натуральним числом можна ефективно з’ясувати, чи є воно кодом скінченної множини та відновити цю множину. Наступна лема уточнює це твердження.

Лема 4.9. Відображення ξ є ін'єктивним, а його область значень $range\,\xi$ – рекурсивна.□

Доведення. ■ Спочатку доведемо від супротивного, що функція $\xi : 2^N_{fin} \to N$ є ін'єктивною. Дійсно, нехай ξ – не ін'єктивна, тоді існують дві різні множини $M_1, M_2 \in 2^N_{fin}$, такі, що $\xi(M_1) = \xi(M_2)$.

Розглянемо два випадки. У першому випадку, хоча б одна множина (M_1 або M_2) є порожньою.

Нехай, наприклад, $M_1 = \varnothing$. Тоді $\xi(M_1) = \xi(\varnothing) = 1$. Так як, за припущенням $\xi(M_1) = \xi(M_2)$, то відповідно й $\xi(M_2) = 1$. Нумерація ξ побудована таким чином, що значення 1 вона приймає тільки на порожній множині. Звідси випливає, що $M_2 = \varnothing$. Прийшли до протиріччя. Аналогічним чином розглядається випадок, коли $M_2 = \varnothing$.

Розглянемо другий випадок, коли обидві множини не порожні: $M_1 \neq \varnothing$ і $M_2 \neq \varnothing$. Покладемо:

$M_1 = \{n_1^1, ..., n_{m_1}^1\},\ n_1^1 < ... < n_{m_1}^1,\ m_1 \geq 1;$

$M_2 = \{n_1^2, ..., n_{m_2}^2\},\ n_1^2 < ... < n_{m_2}^2,\ m_2 \geq 1.$

Оскільки, $\xi(M_1) = \xi(M_2)$, тоді $2^{n_1+1} \cdot ... \cdot p_{m_1-1}^{n_{m_1}^1+1} = 2^{n_2+1} \cdot ... \cdot p_{m_2-1}^{n_{m_2}^2+1}$. Із цього випливає, що $m_1 = m_2 = m$ та для всіх $i = 1, ..., m$ виконуються рівності $n_i^1 + 1 = n_i^2 + 1$, тобто $n_i^1 = n_i^2$. Таким чином, множини M_1, M_2 рівні. Прийшли до протиріччя.▪

■ Тепер доведемо, що $range\,\xi$ – рекурсивна множина.

Область значень функції ξ задається наступним чином:

$$range\,\xi = \{1\} \cup \{2^{n_1} \cdot ... \cdot p_{m-1}^{n_m} \mid 1 \leq n_1 < ... < n_m, m \geq 1\}.$$

Отже, можна запропонувати наступну розв’язуючу процедуру належності елементу множині $range\,\xi$.

Нехай x – довільне натуральне число. Якщо $x = 1$, то $x \in range\,\xi$. Якщо $x = 0$, то $x \notin range\,\xi$.

Якщо $x \notin \{0, 1\}$, то розкладемо x за степенями простих чисел: $x = p_{i_1}^{n_1} \cdot p_{i_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}^{n_m}$, де $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, $n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 1$. Очевидно, що в цьому випадку, $x \in range\,\xi$ тоді й тільки тоді, коли $i_1 = 0$, $i_2 = i_1 + 1 = 1$, ..., $i_m = i_{m-1} + 1 = m - 1$. Таким чином, спираючись на тезу Чьорча [58], можна стверджувати, що множина $range\,\xi$ – рекурсивна.▪□

Наявність ефективної нумерації сім’ї скінченних множин натуральних чисел дає змогу ввести обчислюваність на сім’ї скінченних множин натуральних чисел 2^N_{fin} згідно з нумераційним підходом до обчислюваності [67]. Наведемо формальне означення.

Множинну n-арну функцію F будемо називати частково рекурсивною, якщо існує n-арна частково рекурсивна арифметична функція f, така, що виконується узагальнена рівність: $\xi(F(M_1, \ldots, M_n)) \simeq f(\xi(M_1), \ldots, \xi(M_n))$ для всіх $M_1, \ldots, M_n \in 2^N_{fin}$.

Лема 4.10. Існує рекурсивна арифметична функція f_ξ така, що $f_\xi : N \to range\,\xi$, причому f_ξ – бієкція.□

Доведення. Змістовно теорема доводиться за тезою Чьорча (див., напр., [58]). Наведемо неформальний алгоритм обчислення значень функції f_ξ. Цей алгоритм задається рекурсією: $f_\xi(0)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної рекурсивної множини $range\,\xi$; $f_\xi(x+1)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної множини $range\,\xi$, такому, що не належить множині $\{f_\xi(0), \ldots, f_\xi(x)\}$.

Розглянемо більш формальне доведення. Нехай χ_ξ – характеристична функція множини $range\,\xi$. Оскільки, згідно з лемою 4.9, ця множина рекурсивна, то функція χ_ξ є рекурсивною. Функція f_ξ задається рекурсією.

Базис. $f_\xi(0) = \mu_n(\ \chi_\xi(n) = 1\ )$, тобто $f_\xi(0) = 1$.

Індуктивний крок. $f_\xi(x+1) = \mu_n(\ \chi_\xi(n) = 1 \wedge n \notin \{f_\xi(0),..., f_\xi(x)\}\ )$.

Зрозуміло, що за побудовою маємо нерівності $f_\xi(0) < f_\xi(1) < ... < f_\xi(n) < ...$.

Звідси випливає, що рекурсивна функція f_ξ є бієкцією виду $f_\xi : N \to range\,\xi$.□

4.3.3. Побудова системи породжуючих множинної примітивної програмної алгебри

Розглянемо множинну функцію, яка моделює нумерацію ξ, та множинну функцію, яка моделює функцію ξ^{-1}: $F_\xi(M) = \{\xi(M)\}$ для всіх $M \in 2^N_{fin}$; $F_{\xi^{-1}}(\{n\}) = \xi^{-1}(n)$ для всіх $n \in range\,\xi$.

Змістовно кажучи, функція F_ξ є кодуючою функцією, а $F_{\xi^{-1}}$ є розкодуючою.

Значення цих функцій розкриває наступна лема про представлення, доведення якої випливає із відповідних означень.

Лема 4.11. Нехай F – n-арна частково рекурсивна множинна функція, а G – n-арна множинна функція, що представляє арифметичну частково рекурсивну функцію з означення часткової рекурсивності F. Тоді для довільних $M_1,..., M_n \in 2^N_{fin}$ виконується узагальнена рівність $F(M_1,..., M_n) \simeq F_{\xi^{-1}}(G(F_\xi(M_1),..., F_\xi(M_n)))$.□

Для компактного викладення введемо наступне позначення: $[F \bigcup P]$ – замикання множини функцій та предикатів $F \bigcup P$ у множинній ППА.

Лема 4.12 (побудова кодуючої функції за розкодуючою). Функцію F_ξ можна побудувати із елементів системи Σ та функції $F_{\xi^{-1}}$ у множинній ППА: $F_\xi \in \left[\Sigma \bigcup \left\{F_{\xi^{-1}}\right\}\right]$.□

Доведення. Нехай $F(f_\xi)$ – множинна функція, що представляє арифметичну рекурсивну функцію f_ξ. Із наслідку 4.1 випливає, що $F(f_\xi) \in [\Sigma]$. Розглянемо наступну функцію:

$$H(X,Y) \overset{def}{=} \left(F_{\xi^{-1}}\left(F(f_\xi)(Y)\right) = X\right) \underset{Y}{*} \left(G_s(Y)\right),$$

де $G_s(Y) \overset{def}{=} Y \oplus \{1\}(Y)$ – множинна представляюча арифметичної функції слідування $s(x) = x + 1$.

Можна перевірити, що $F_\xi(X) = F(f_\xi)(H(X,\{0\}))$.

Основна ідея побудови кодуючої функції за розкодуючою полягає у наступному. Нехай M – деяка скінченна множина. Будемо перебирати елементи множини $range\,\xi$ (коди) у порядку $f_\xi(0)$, $f_\xi(1), \ldots$. До поточного елементу (коду) виду $f_\xi(i)$ застосуємо функцію ξ^{-1} та порівняємо значення $\xi^{-1}(f_\xi(i))$ із M. Якщо виконується рівність $\xi^{-1}(f_\xi(i)) = M$, то $\xi(M) = f_\xi(i)$.

Проведені побудови в множинній ППА реалізують цю ідею; при цьому натуральні числа представляються сінглтонами, а арифметичні функції та предикати – їхніми множинними представляючими.□

Лема 4.13. Функцію $F_{\xi^{-1}}$ можна побудувати із елементів системи Σ у множинній ППА: $F_{\xi^{-1}} \in [\Sigma]$.□

Доведення леми полягає у наступному.

Розкодуюча функція $F_{\xi^{-1}}(X)$ за кодом множини повинна повертати власне множину. Вона будується розгалуження: $F_{\xi^{-1}}(X) \overset{def}{=} \Diamond^{(3)}\left(X = \{1\}(X), \varnothing\{X\}, \widetilde{F}_{\xi^{-1}}(X)\right)$.

Спочатку перевіряється, чи дорівнює код множини 1. Якщо це так, то функція одразу повертає порожню множину, адже нумерація побудована таким чином, що вона приймає значення 1 тільки на порожній множині.

Якщо значення коду не дорівнює 1, то використовується функція $\widetilde{F}_{\xi^{-1}}(X)$, яка визначається наступним чином: $\widetilde{F}_{\xi^{-1}}(X) \overset{def}{=} \widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}_{\xi^{-1}}(X) \div \{1\}(X)$. Ця функція необхідна для того, щоб від кожного елементу множини, отриманої за допомогою функції $\widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}_{\xi^{-1}}(X)$ відняти одиницю. Адже нумерація побудована так, що до кожного елементу вихідної множини спочатку додається одиниця, а вже потім елемент виступає у якості степеня деякого простого числа: $\xi'(M) \overset{def}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{n_2+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{n_m+1}$, де $n_1,..,n_m$ – елементи вихідної множини.

Функція $\widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}_{\xi^{-1}}(X)$ лише запускає основну функцію $\widetilde{\widetilde{F}}_{\xi^{-1}}(X,Y,Z)$ на початкових даних: $\widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}_{\xi^{-1}}(X) \overset{def}{=} \widetilde{\widetilde{F}}_{\xi^{-1}}(X, \varnothing(X), \{0\}(X))$.

Розглянемо функцію $\widetilde{\widetilde{F}}_{\xi^{-1}}(X,Y,Z)$. Вона визначається циклюванням:

$$\widetilde{\widetilde{F}}_{\xi^{-1}}(X,Y,Z) \overset{def}{=} (X \neq \{1\}(X)) \underset{Y,\,X,\,Z}{*} \left(Y \cup F_{\exp}(Z,X), F_{div}\left(X, F_{\deg}\left(F_p(Z), F_{\exp}(Z,X)\right)\right), G_s(Z)\right),$$

де функції $F_{\exp}(X,Y)$, $F_{div}(X,Y)$, $F_{\deg}(X,Y)$, $G_s(Z)$, $F_p(Z)$ $\in$ $[\Sigma]$ є множинними представляючими відповідно теоретико-числових функцій $\exp(x,y)$, $div(x,y)$, $\deg(x,y)$, $s(z)$, $p(z)$ [65, 66].

Функція $\widetilde{\widetilde{F}}_{\xi^{-1}}(X,Y,Z)$ виконується до тих пір, поки перший аргумент X (значення коду множини) не буде дорівнювати 1. У другому аргументі функції Y будуть накопичуватися елементи результуючої множини. Третій аргумент функції Z є допоміжним і відповідає за номер простого числа. Усі три аргументи функції змінюються у циклі.

Спочатку за допомогою функції $F_{\exp}(X, Y)$ знаходимо степінь першого простого числа. Відповідно значення вихідної множини (аргумент Y) збільшуємо елементом знайденого степеню $Y \bigcup F_{\exp}(Z, X)$, а значення коду (аргумент X) зменшуємо на значення простого числа, піднесеного до знайденого степеню $F_{div}(X, F_{\deg}(F_p(Z), F_{\exp}(Z, X)))$. Після цього аргумент Z збільшуємо на 1, тобто на наступній ітерації циклу будемо розглядати друге просте число і т.д. Таким чином, після виконання циклу, результуюча множина Y буде містити усі елементи вихідної множини.□

Теорема 4.1. Система Σ є системою породжуючих множинної ППА.□

Доведення випливає із наслідку 4.1 та лем 4.9–4.13.□

4.4. Мультимножинна примітивна програмна алгебра

За аналогією з множинною ППА, носієм мультимножинної ППА виступає множина обчислюваних багатомісних функцій та предикатів над скінченними мультимножинами натуральних чисел. Сигнатура складається із тих самих операцій, що й у арифметичній та множинній ППА: суперпозиція, розгалуження, циклювання. Метою підрозділу є побудова системи породжуючих мультимножинної ППА.

Система породжуючих мультимножинної ППА $\Sigma_{\text{М}}$ складається із предикату рівності мультимножин $\alpha = \beta$, функцій об’єднання $\alpha \bigcup_{All} \beta$, додавання $\alpha \oplus \beta$ та віднімання $\alpha \div \beta$ мультимножин, константних функцій $\{1^1\}(\alpha)$ та $\varnothing_m(\alpha)$, що фіксують відповідно мультимножину вигляду $\{1^1\}$ та порожню мультимножину $\varnothing_m$, спеціальної бінарної функції над двома мультимножинами $\varphi(\alpha, \beta)$ та селекторних функцій I_m^n:

$$\Sigma_{\mathrm{M}} \overset{def}{=} \left\{ \alpha = \beta, \alpha \bigcup_{All} \beta, \alpha \oplus \beta, \alpha \div \beta, \{1^1\}(\alpha), \varnothing_m(\alpha), \varphi(\alpha,\beta), I_m^n \right\}_{\substack{n=1,2,\ldots \\ m=1,..,n}}.$$

Наведемо означення функцій додавання $\oplus$, віднімання $\div$ мультимножин та функції φ.

Перед тим, як вводити означення функцій додавання $\oplus$ та віднімання $\div$ мультимножин, наведемо означення повного образу мультимножин відповідно до [72].

Повним образом мультимножини α з основою U відносно функції $f : D \tilde{\to} D$ будемо називати мультимножину, яка позначається $f[\alpha]$. Її основою є повний образ множини U відносно функції f, а значення характеристичної функції на аргументі d задається рівністю $\sum_{d' \in f^{-1}(d)} \chi_\alpha(d')$, де $f^{-1}(d)$ позначає повний прообраз елемента d відносно функції f. Покладемо, що сума порожньої множини доданків дорівнює 0.

Тоді операцію додавання мультимножин можна визначити через повний образ відносно стандартного бінарного додавання наступним чином: $\alpha \oplus \beta = +[\alpha \otimes \beta]$.

Аналогічним чином, визначають операцію віднімання мультимножин через повний образ відносно бінарної операції зрізаної різниці: $\alpha \oplus \beta = \dot{-}[\alpha \otimes \beta]$.

Вище $\otimes$ – бінарна операція декартового з'єднання мультимножин відповідно (див. пункт 2.2.9).

Функція $\varphi(\{n_1^1\},\{k_1^1\})$ визначається як $\{n_1^1\},\{k_1^1\} \overset{\varphi}{\mapsto} \{n_1^{k_1}\}$. Покладемо, що при $k_1 = 0$, $\varphi(\{n_1^1\},\{k_1^1\}) = \varnothing_m$.

Функція об'єднання $\bigcup_{All}$ мультимножин визначається стандартно (див. пункт 2.2.1).

У термальних записах мультимножинних функцій та предикатів предметні змінні позначимо грецькими літерами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ (у випадку множинних функцій та предикатів в цій ролі використовувалися великі літери $X, Y, Z...$, а у випадку арифметичних функцій та предикатів – малі літери).

4.4.1. Мультимножинні функції (предикати), що представляють арифметичні функції (предикати)

Аналогічно до множинних представляючих, вводиться означення мультимножинних представляючих функцій та предикатів. Це необхідно для моделювання арифметичних функцій (предикатів) мультимножинними функціями (предикатами). Основна ідея полягає у представленні натурального числа n мультимножинним сінглтоном $\{n^1\}$. Мультимножинні представляючі функцій та предикатів, як і множинні, будемо позначати великими літерами (проте з контексту завжди буде зрозуміло, про які представляючі йде мова).

Нехай $f^{(n)}$ – арифметична функція. Тоді функція $F^{(n)}$ представляє функцію $f^{(n)}$ (або $F^{(n)}$ – *представляюча функція* для функції $f^{(n)}$), якщо виконується $\forall\, x_1,...,x_n\ \left(\left\{f^{(n)}(x_1,...,x_n)^1\right\} \simeq F^{(n)}\left(\left\{x_1^1\right\},...,\left\{x_n^1\right\}\right)\right)$.

Аналогічним чином, нехай $p^{(n)}$ – арифметичний предикат. Тоді предикат $P^{(n)}$ представляє предикат $p^{(n)}$ (або $P^{(n)}$ – *представляючий предикат* для предикату $p^{(n)}$), якщо $\forall\, x_1,...,x_n\ \left(p^{(n)}(x_1,...,x_n) \simeq P^{(n)}\left(\left\{x_1^1\right\},...,\left\{x_n^1\right\}\right)\right)$.

У підрозділі 4.2 було побудовано систему породжуючих σ'_N арифметичної ППА. Наступна лема стосується мультимножинних представляючих цієї системи.

Лема 4.14 (мультимножинні представляючі елементів системи σ'_N). Представляючі для елементів системи σ'_N:

1) предикат $\alpha = \beta$ представляє предикат $x = y$;

2) функція $\alpha \oplus \beta$ представляє функцію $x + y$;

3) мультимножинний селектор I_m^n представляє арифметичний селектор I_m^n;

4) константна функція $\{1^1\}(\alpha)$ представляє функцію $1(x)$;

5) константна функція $\{1^1\}(\alpha) \dot{-} \{1^1\}(\alpha)$ представляє функцію $0(x)$.□

Доведення. Твердження щодо представляючих предикату рівності, селекторів та константних функцій є очевидними. Те, що додавання скінченних мультимножин представляє арифметичне додавання випливає із рівності $\{n_1^{k_1}\} \oplus \{n_2^{k_2}\} = \{(n_1 + n_2)^{k_1 \cdot k_2}\}$, яка, в свою чергу, випливає із означень.□

Лема 4.15 (представляюча суперпозиції). Якщо мультимножинні функції $F^{(m)}$, $F_1^{(n)}, ..., F_n^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f^{(m)}$, $f_1^{(n)}, ..., f_m^{(n)}$, то суперпозиція $S^{(m+1)}\left(F^{(m)}, F_1^{(n)}, ..., F_m^{(n)}\right)$ представляє суперпозицію $S^{(m+1)}\left(f^{(m)}, f_1^{(n)}, ..., f_m^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча суперпозиції функцій є суперпозицією представляючих.

Доведення. Проводиться аналогічним чином як й у лемі 4.6 про множинну представляючу суперпозиції.□

Лема 4.16 (представляюча розгалуження). Якщо мультимножинні функції $F_1^{(n)}$, $F_2^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$, а мультимножинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то розгалуження $\Diamond^{(3)}\left(P^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)}\right)$ представляє розгалуження $\Diamond^{(3)}\left(p^{(n)}, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча розгалуження функцій за предикатом є розгалуженням представляючих функцій за предикатом, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Проводиться аналогічним чином як й у лемі 4.7 про множинну представляючу розгалуження.□

Аналогічний факт має місце при розгалужені предикатів.

Лема 4.17 (представляюча циклування). Якщо мультимножинні функції $F_1^{(n)},...,\ F_n^{(n)}$ представляють відповідно арифметичні функції $f_1^{(n)},...,f_n^{(n)}$, а мультимножинний предикат $P^{(n)}$ представляє арифметичний предикат $p^{(n)}$, то циклування $*^{(n+1)}\left(P^{(n)},F_1^{(n)},...,\ F_n^{(n)}\right)$ представляє циклування $*^{(n+1)}\left(p^{(n)},f_1^{(n)},...,f_n^{(n)}\right)$.□

Таким чином, лема стверджує, що представляюча циклування функцій за предикатом є циклуванням представляючих функцій за предикатом, який представляє вихідний предикат.

Доведення. Проводиться аналогічним чином як й у лемі 4.8 про множинну представляючу циклювання.□

Наслідок 4.2. У мультимножинній ППА із елементів системи Σ_{M} можна побудувати мультимножинну представляючу довільної частково рекурсивної арифметичної функції.□

4.4.2. Нумерація сімейства скінченних мультимножин натуральних чисел

Побудуємо нумерацію ξ_{M} скінченних мультимножин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ'_{M} скінченних непорожніх мультимножин натуральних чисел.

Нехай $\alpha=\left\{n_1^{k_1},...,n_m^{k_m}\right\}$, де $m\geq 1$, $k_1,...,k_m\geq 1$, $n_1<n_2<...<n_m$ – непорожня скінченна мультимножина натуральних чисел. Покладемо, що $\xi'_{\mathrm{M}}(\alpha)\overset{def}{=}2^{n_1+1}\cdot 3^{k_1}\cdot 5^{n_2+1}\cdot 7^{k_2}\cdot ...\cdot p_{2m-2}^{n_m+1}\cdot p_{2m-1}^{k_m}=\prod_{i=1}^{m}p_{2i-2}^{n_i+1}\cdot p_{2i-1}^{k_i}$.

Вище, як і раніше, p_i, $i=0,1,2,...$ – i-те просте число згідно [65, 66] ($p_0=2$, $p_1=3$, $p_3=5$,…).

Шукана нумерація ξ_{M} задається кусковою схемою:

$$\xi_{\mathrm{M}}(\alpha)=\begin{cases}1,\ \textit{якщо}\ \alpha=\varnothing,\\ \xi'_{\mathrm{M}}(\alpha),\ \textit{інакше},\end{cases}$$

де α – скінченна мультимножина натуральних чисел. Сім'ю всіх скінченних мультимножин натуральних чисел позначимо M.

Побудована нумерація ξ_{M} є ефективною в тому розумінні, що за довільним натуральним числом можна ефективно з'ясувати, чи є воно кодом скінченної мультимножини та відновити цю мультимножину. Наступна лема уточнює це твердження.

Лема 4.18. Відображення ξ_{M} є ін'єктивним, а його область значень $range\,\xi_{\mathrm{M}}$ – рекурсивна.□

Доведення. ■ Спочатку доведемо від супротивного, що функція $\xi_{\mathrm{M}}:\alpha\to N$ є ін'єктивною. Дійсно, нехай ξ_{M} – неін'єктивна, тоді існують дві різні мультимножини $\alpha,\beta\in\mathrm{M}$, такі, що $\xi_{\mathrm{M}}(\alpha)=\xi_{\mathrm{M}}(\beta)$.

Розглянемо два випадки. У першому випадку, хоча б одна мультимножина (α або β) є порожньою.

Нехай, наприклад, $\alpha=\varnothing_m$. Тоді $\xi_{\mathrm{M}}(\alpha)=\xi_{\mathrm{M}}(\varnothing_m)=1$. Так як, за припущенням $\xi_{\mathrm{M}}(\alpha)=\xi(\beta)$, то відповідно й $\xi_{\mathrm{M}}(\beta)=1$. Нумерація ξ_{M} побудована таким чином, що значення 1 вона приймає тільки на порожній мультимножині. Звідси випливає, що $\beta=\varnothing$. Прийшли до протиріччя. Аналогічним чином розглядається випадок, коли $\beta=\varnothing$.

Розглянемо другий випадок, коли обидві мультимножини не порожні: $\alpha\neq\varnothing$ і $\beta\neq\varnothing$. Покладемо:

$$\alpha=\left\{a_1^{k_1},\dots,a_{m_1}^{k_{m_1}}\right\},\ a_1<\dots<a_{m_1},\ m_1\geq 1,\ k_1,\dots,k_{m_1}\geq 1;$$

$$\beta=\left\{b_1^{l_1},\dots,b_{m_2}^{l_{m_2}}\right\},\ b_1<\dots<b_{m_2},\ m_2\geq 1,\ l_1,\dots,l_{m_2}\geq 1.$$

Оскільки, $\xi_{\mathrm{M}}(\alpha)=\xi_{\mathrm{M}}(\beta)$, тоді $2^{a_1+1}\cdot 3^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_{2m_1-2}^{a_{m_1}+1}\cdot p_{2m_1-1}^{k_{m_1}}=$ $=2^{b_1+1}\cdot 3^{l_1}\cdot\ldots\cdot p_{2m_2-2}^{b_{m_2}+1}\cdot p_{2m_2-1}^{k_{m_2}}$. Із цього випливає, що $m_1=m_2=m$ та для всіх $i=1,\ldots,m$ виконуються рівності $a_i=b_i$ та $k_i=l_i$, тобто $\{a_i^{k_i}\}=\{b_i^{l_i}\}$. Таким чином, мультимножини α,β рівні. Прийшли до протиріччя.▪

■ Тепер доведемо, що $range\,\xi_{\mathrm{M}}$ є рекурсивною множиною.

Область значень функції ξ_{M} задається наступним чином:

$$range\,\xi_{\mathrm{M}}=\{1\}\cup\left\{2^{n_1+1}\cdot 3^{k_1}\cdot 5^{n_2+1}\cdot 7^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_{2m-2}^{n_m+1}\cdot p_{2m-1}^{k_m}\;\middle|\;1\le n_1<\ldots<n_m,\, m\ge 1, k_1,\ldots,k_m\ge 1\right\}.$$

Отже, можна запропонувати наступну розв’язуючу процедуру приналежності елементу множині $range\,\xi_{\mathrm{M}}$.

Нехай x – довільне натуральне число. Якщо $x=1$, то $x\in range\,\xi_{\mathrm{M}}$. Якщо $x=0$, то $x\notin range\,\xi_{\mathrm{M}}$.

Якщо $x\notin\{0,1\}$, то розкладемо x за степенями простих чисел: $x=p_{i_1}^{n_1}\cdot p_{i_2}^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_{m-1}}^{n_m}\cdot p_{i_m}^{k_m}$, де $i_1<i_2<\ldots<i_m$, $n_1,n_2,\ldots,n_m\ge 1$, $k_1,k_2,\ldots,k_m\ge 1$. Очевидно, що в цьому випадку $x\in range\,\xi_{\mathrm{M}}$ тоді й тільки тоді, коли $i_1=0, i_2=i_1+1=1,\ \ldots,\ i_m=i_{m-1}+1=m-1$, причому $n_1<n_2<\ldots<n_m$ та m – парне число. Таким чином, спираючись на тезу Чьорча [58], можна стверджувати, що множина $range\,\xi_{\mathrm{M}}$ є рекурсивною.▪□

Наявність ефективної нумерації сім’ї скінченних мультимножин натуральних чисел дає змогу ввести обчислюваність на сім’ї М скінченних мультимножин натуральних чисел. Наведемо формальне означення.

Мультимножинну n-арну функцію F будемо називати частково рекурсивною, якщо існує n-арна частково рекурсивна арифметична функція f, така, що виконується узагальнена рівність: $\xi_{\mathrm{M}}(F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))\simeq f(\xi_{\mathrm{M}}(\alpha_1),\ldots,\xi_{\mathrm{M}}(\alpha_n))$ для всіх $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathrm{M}$.

Лема 4.19. Існує рекурсивна арифметична функція $f_{\xi_{\mathrm{M}}}$, така, що $f_{\xi_{\mathrm{M}}}:N\to range\,\xi_{\mathrm{M}}$, причому $f_{\xi_{\mathrm{M}}}$ – бієкція.□

Доведення. Змістовно теорема доводиться за тезою Чьорча (див., напр., [58]). Наведемо неформальний алгоритм обчислення значень функції f_{ξ_M}. Цей алгоритм задається рекурсією: $f_{\xi_M}(0)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної рекурсивної множини $range\,\xi_M$; $f_{\xi_M}(x+1)$ покладається рівним найменшому елементу нескінченної множини $range\,\xi_M$, такому, що не належить множині $\{f_{\xi_M}(0),\ldots,f_{\xi_M}(x)\}$.

Розглянемо більш формальне доведення. Нехай χ_{ξ_M} – характеристична функція множини $range\,\xi_M$. Оскільки, згідно з лемою 4.18, ця множина є рекурсивною, то функція χ_{ξ_M} – рекурсивна. Функція f_{ξ_M} задається рекурсією.

Базис. $f_{\xi_M}(0)=\mu_n(\ \chi_{\xi_M}(n)=1\ )$, тобто $f_{\xi_M}(0)=1$.

Індуктивний крок. $f_{\xi_M}(x+1)=\mu_n(\ \chi_{\xi_M}(n)=1 \wedge n \notin \{f_{\xi_M}(0),\ldots,f_{\xi_M}(x)\}\ )$.

Отже, що за побудовою маємо нерівності $f_{\xi_M}(0)<f_{\xi_M}(1)<\ldots<f_{\xi_M}(n)<\ldots$.

Звідси випливає, що рекурсивна функція f_{ξ_M} – бієкція вигляду $f_{\xi_M}: N \to range\,\xi_M$. □

4.4.3. Побудова системи породжуючих мультимножинної примітивної програмної алгебри

Розглянемо мультимножинну функцію, яка моделює нумерацію ξ_M, та мультимножинну функцію, яка моделює функцію ξ_M^{-1}: $F_{\xi_M}(\alpha)=\{\xi_M(\alpha)^1\}$ для всіх $\alpha \in M$; $F_{\xi_M^{-1}}(\{n^1\})=\xi_M^{-1}(n)$ для всіх $n \in range\,\xi$.

Змістовно кажучи, функція F_{ξ_M} є кодуючою функцією, а $F_{\xi_M^{-1}}$ є розкодуючою.

Значення цих функцій розкриває наступна лема про представлення, доведення якої випливає із відповідних означень.

Лема 4.20. Нехай F – n-арна частково рекурсивна мультимножинна функція, а G – n-арна мультимножинна функція, що представляє арифметичну частково рекурсивну функцію з означення часткової рекурсивності F. Тоді для довільних $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathrm{M}$ виконується узагальнена рівність $F(\alpha_1,...,\alpha_n) \simeq F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(G(F_{\xi_{\mathrm{M}}}(\alpha_1),...,F_{\xi_{\mathrm{M}}}(\alpha_n)))$.□

Лема 4.21 (побудова кодуючої функції за розкодуючою). Функцію $F_{\xi_{\mathrm{M}}}$ можна побудувати із елементів системи Σ_{M} та функції $F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}$ у мультимножинній ППА: $F_{\xi_{\mathrm{M}}} \in \lfloor \Sigma_{\mathrm{M}} \cup \{F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}\} \rfloor$.□

Доведення. Нехай $F(f_{\xi_{\mathrm{M}}})$ – мультимножинна функція, що представляє арифметичну рекурсивну функцію $f_{\xi_{\mathrm{M}}}$. Із наслідку 4.2 випливає, що $F(f_{\xi_{\mathrm{M}}}) \in [\Sigma_{\mathrm{M}}]$. Розглянемо наступну функцію:

$$H(\alpha,\beta) \stackrel{def}{=} \left(F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}\left(F(f_{\xi_{\mathrm{M}}})(\beta)\right) = \alpha\right) \underset{\beta}{*} (G_s(\beta)),$$

де $G_s(\beta) \stackrel{def}{=} \beta \oplus \{1^1\}(\beta)$ – мультимножинна представляюча арифметичної функції слідування $s(x) = x + 1$.

Можна перевірити, що $F_{\xi_{\mathrm{M}}}(\alpha) = F(f_{\xi_{\mathrm{M}}})(H(\alpha,\{0^1\}))$.

Основна ідея побудови кодуючої функції за розкодуючою полягає у наступному. Нехай α – деяка скінченна мультимножина. Будемо перебирати елементи множини $range\,\xi_{\mathrm{M}}$ (коди) у порядку $f_{\xi_{\mathrm{M}}}(0)$, $f_{\xi_{\mathrm{M}}}(1), \ldots$. До поточного елементу (коду) виду $f_{\xi_{\mathrm{M}}}(i)$ застосуємо функцію ξ_{M}^{-1} та порівняємо значення $\xi_{\mathrm{M}}^{-1}(f_{\xi_{\mathrm{M}}}(i))$ з α; якщо виконується рівність $\xi_{\mathrm{M}}^{-1}(f_{\xi_{\mathrm{M}}}(i)) = \alpha$, то $\xi_{\mathrm{M}}(\alpha) = f_{\xi_{\mathrm{M}}}(i)$.

Проведені побудови в мультимножинній ППА реалізують цю ідею; при цьому натуральні числа представляються мультимножинним сінглтонами, а арифметичні функції та предикати – їхніми представляючими.□

Лема 4.22. Функцію $F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}$ можна побудувати із елементів системи Σ_{M} у мультимножинній ППА: $F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}} \in [\Sigma_{\mathrm{M}}]$.□

Доведення леми полягає у наступному.

Розкодуюча функція $F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha)$ за кодом мультимножини повинна повертати власне мультимножину. Вона будується розгалуження:

$$F_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha) \overset{def}{=} \Diamond\left(\alpha = \left\{1^1\right\}(\alpha), \varnothing_m\{\alpha\}, \tilde{\tilde{\tilde{F}}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha)\right).$$

Спочатку перевіряється, чи дорівнює код мультимножини мультимножинному сінглтону $\left\{1^1\right\}$. Якщо це так, то функція одразу повертає порожню мультимножину, адже це означає, що код дорівнює 1, а нумерація $\xi'_{\mathrm{M}}(\alpha)$ побудована таким чином, що вона приймає значення 1 тільки на порожній мультимножині.

Якщо значення коду не дорівнює 1, то використовується функція $\tilde{\tilde{\tilde{F}}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha)$, яка визначається наступним чином: $\tilde{\tilde{\tilde{F}}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(X) \overset{def}{=} \tilde{\tilde{F}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha) \div \left\{1^1\right\}(\alpha)$. Ця функція необхідна для того, щоб кожний елемент мультимножини, отриманої за допомогою функції $\tilde{\tilde{F}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha)$ зменшити на 1. Адже нумерація побудована так, що до кожного елементу основи вихідної мультимножини спочатку додається одиниця, а вже потім отриманий елемент виступає у якості степеня деякого простого числа: $\xi'_{\mathrm{M}}(\alpha) \overset{def}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{n_2+1} \cdot 7^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_{2m-2}^{n_m+1} \cdot p_{2m-1}^{k_m} = \prod_{i=1}^{m} p_{2i-2}^{n_i+1} \cdot p_{2i-1}^{k_i}$, де $n_1^{k_1}, \ldots, n_m^{k_m}$ – елементи вихідної мультимножини.

Функція $\tilde{\tilde{F}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha)$ лише запускає основну функцію $\tilde{F}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}$ на початкових даних: $\tilde{\tilde{F}}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha) \overset{def}{=} \tilde{F}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}\left(\alpha, \varnothing_m(\alpha), \left\{0^1\right\}(\alpha)\right)$.

Розглянемо функцію $\tilde{F}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha, \beta, \gamma)$. Вона визначається циклюванням:

$$\tilde{F}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha, \beta, \gamma) \overset{def}{=} \left(\alpha \neq \left\{1^1\right\}(\alpha)\right) \underset{\beta, \alpha, \gamma}{*} \left(F_1^{(3)}, F_2^{(3)}, F_3^{(1)}\right),$$

де функції $F_1^{(3)}, F_2^{(3)}, F_3^{(1)}$ відповідають за зміну аргументів β, α, γ саме у цьому порядку в циклі. Вони визначаються наступним чином:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma) \overset{def}{=} \beta \cup_{All} \varphi\big(F_{\exp}(\gamma,\alpha), F_{\exp}(G_s(\gamma),\alpha)\big),$$

$$F_2(\alpha,\beta,\gamma) \overset{def}{=} F_{div}\Big(\alpha, F_{\bullet}\Big(F_{\deg}\big(F_p(\gamma), F_{\exp}(\gamma,\alpha)\big), F_{\deg}\big(F_p(G_s(\gamma)), F_{\exp}(G_s(\gamma),\alpha)\big)\Big)\Big),$$

$$F_3(\gamma) \overset{def}{=} G_s(G_s(\gamma)).$$

Вище $F_{\exp}(\alpha,\beta)$, $F_{div}(\alpha,\beta)$, $F_{\deg}(\alpha,\beta)$, $F_{\bullet}(\alpha,\beta)$, $G_s(\gamma)$, $F_p(\gamma)$ $\in$ $[\Sigma_{\mathrm{M}}]$ – множинні представляючі відповідно теоретико-числових функцій $\exp(x,y)$, $div(x,y)$, $\deg(x,y)$, $x \cdot y$, $s(z)$, $p(z)$ [65, 66].

Функція $\widetilde{F}_{\xi_{\mathrm{M}}^{-1}}(\alpha,\beta,\gamma)$ виконується до тих пір, поки перший аргумент α (значення коду мультимножини) не буде дорівнювати $\{1^1\}$. У другому аргументі функції β будуть накопичуватися елементи результуючої мультимножини. Третій аргумент функції γ є допоміжним і відповідає за номер простого числа. Усі три аргументи функції змінюються у циклі.

Спочатку за допомогою функції $F_{\exp}(X,Y)$ знаходимо степінь першого простого числа. Значення вихідної множини (аргумент β) збільшуємо на елемент, який будується за допомогою спеціальної функції над мультимножинами $\varphi(\alpha)$. Значення самого елементу знаходиться за допомогою функції $F_{\exp}(\gamma,\alpha)$, а значення його кратності за допомогою тієї ж функції, але визначеної для наступного простого числа $F_{\exp}(G_s(\gamma),\alpha)$. Значення коду (аргумент α) зменшуємо на значення добутку першого та другого простих числа, піднесених до відповідних степенів $F_{div}\Big(\alpha, F_{\bullet}\Big(F_{\deg}\big(F_p(\gamma), F_{\exp}(\gamma,\alpha)\big), F_{\deg}\big(F_p(G_s(\gamma)), F_{\exp}(G_s(\gamma),\alpha)\big)\Big)\Big)$. Після цього аргумент γ збільшуємо на 2. Тобто на наступній ітерації циклу будемо розглядати вже третє та четверте прості числа (відповідно для елементу та кратності цього елементу у мультимножині) і т.д. Таким чином, після виконання циклу, результуюча множина β буде містити усі елементи вихідної мультимножини.□

Теорема 4.2. Система $\Sigma_{\text{М}}$ є системою породжуючих мультимножинної ППА.□

Доведення випливає із наслідку 4.2 та лем 4.18–4.22.□

4.5. Застосування отриманих результатів

Частково рекурсивні мультимножинні функції є моделями ДНК-обчислень у біоінформатиці.

ДНК-обчислення – це форма обчислень, яка використовує ДНК, біохімію та молекулярну біологію натомість традиційним комп'ютерним технологіям, які побудовано на кремнію [7]. Відповідно, ДНК-комп'ютер – обчислювальна система, що використовує обчислювальні можливості молекул ДНК.

Розвиток цієї предметної області було розпочато у 1994 р. роботою Леонарда Адлемана (Leonard Adleman), в якій було показано як, за допомогою пробірки з ДНК, можна досить ефективно вирішити класичну задачу комівояжера. Також відомі роботи Еуди Шапіро (Ehud Shapiro) із реалізації скінченних автоматів, Ерика Вінфрі (Erik Winfree) із синтезу різноманітних поверхонь (зокрема, такої відомої фрактальної структури як килима Серпинського) [63].

Молекулу ДНК формально можна подати у вигляді пари слів у чотирьохлітерному алфавіті $\aleph \overset{def}{=} \{А, Т, Ц, Г\}$, кожний символ якого позначає відповідну основу нуклеотидів – аденін, тимін, цитозин та гуанін: $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$, де $\xi_1,...,\xi_n \in \aleph$, $\eta_1,...,\eta_n \in \aleph$. Якщо компліментарність уточнити у вигляді бієкції $\psi : \aleph \to \aleph$, $\psi(А) = Т$, $\psi(Т) = А$, $\psi(Ц) = Г$, $\psi(Г) = Ц$, тоді мають виконуватися рівності $\psi(\xi_i) = \eta_i$ для усіх $i = 1,..,n$. Таким чином, друге слово пари однозначно відновлюється за першим словом. Тому, обчислення на ДНК уточнюються як обчислення над словами у вказаному алфавіті.

Формальна модель такої словарної обчислюваності була побудована в роботі [41] у термінах ППА.

Розглянемо більш складний випадок, коли, по-перше, ланцюжки ДНК мають, взагалі кажучи, різну довжину, та, по-друге, враховується "зсув" одного ланцюжка відносно іншого (зсуви можуть виникають із-за подовження, доповнення, вкорочення, розрізу, модифікації або зшивки ланцюжків). Тоді, моделлю ДНК є трійка вигляду $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_m,k)$, де $k \le \min(n,m)$ – кількість пар (нуклеотидів), пов'язаних між собою.

Формально кажучи, повинні виконуватися твердження: для усіх $i = 1,..,k$ $\xi_i = \psi(\ \eta_i(m-k+1)\ )$ або $\eta_i = \psi(\ \xi_i(n-k+1)\ )$[6]. В частковому випадку при $n = m = k$ отримуємо розглянутий раніше випадок ланцюжків однакової довжини без зсувів. Вирішення питання обчислюваної повноти для такого загального випадку в термінах ППА потребує окремого розгляду.

Очевидно, що виникає необхідність у загальних моделях молекулярних обчислень, які б дозволяли планувати нові експерименти та узагальнювати існуючі. Однією з таких моделей є модель паралельної фільтрації (Parallel Filtering Model). Основою цієї моделі виступає "пробірка", формальною моделлю якої, у свою чергу, виступає мультимножина рядків над алфавітом $\aleph = \{A, T, Ц, Г\}$.

Відповідно до цієї моделі над "пробіркою" визначаються операції злиття, розмноження, виявлення, добування, розділення за довжиною та розділення за префіксом. Перелічені операції можна отримати із системи породжуючих мультимножинної ППА. Цей факт дає підставу стверджувати, що частково рекурсивні мультимножинні функції виступають формальними моделями ДНК-обчислень.

[6] Перша рівність описує випадок зсуву першого (верхнього) ланцюжка ДНК вліво, в друга – вправо.

Крім цього, як визначалося в попередніх двох розділах, мультимножини рядків виступають уточненнями таблиць з дублікатами рядків в табличних базах даних. Отже, частково рекурсивні мультимножинні функції є також моделями алгоритмічних маніпуляцій над таблицями в сучасних СУБД.

Розділ присвячено обчислюваності на множинах та мультимножинах. Обчислюваність вводиться як нумераційна обчислюваність за А.І. Мальцевим. Апаратом для задання класу обчислюваних функцій виступають примітивні програмні алгебри, введені В.Н. Редьком.

У розділі вводяться основні означення теорії ППА та будується нова, більш зручна в технічному плані, система породжуючих арифметичної ППА.

На основі побудованої системи породжуючих арифметичної ППА будуються системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА. Системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА містять предикат рівності та селектори. Специфічність множинної (мультимножинної) ППА проявляється в тому, що її система породжуючих, крім вказаних елементів, містить функції об’єднання множин, додавання множин, різниці множин та константі функції, що фіксують порожню множину та сінглтон $\{1\}$ (відповідно функції об’єднання мультимножин, додавання мультимножин, різниці мультимножин, константні функції, що фіксують порожню мультимножину та мультимножинний сінглтон $\{1^1\}$, а також специфічну функцію, таку, що $\{n_1^1\},\{k_1^1\} \overset{\varphi}{\mapsto} \{n_1^{k_1}\}$).

Отриманий алгебраїчний опис класу обчислюваних функцій над мультимножинами застосовано для моделювання ДНК-обчислень у біоінформатиці та алгоритмічних маніпуляцій над таблицями у сучасних СУБД.

Конкретний вигляд отриманих систем породжуючих множинної та мультимножинної ППА дозволяє зробити висновок про їхню природність та спорідненість. Зокрема, вони містять предикат рівності, а їхні бінарні операції виникають із стандартних арифметичних операцій додавання та зрізаної різниці шляхом їх розповсюдження за допомогою конструкції повного образу.

Модель ППА продемонструвала свою адекватність для предметних областей: ДНК-обчислення та табличні маніпуляції. Отримані результати доповнюють низку результатів школи В.Н. Редька щодо обчислюваності в різноманітних предметних областях: натуральні, цілі, раціональні числа, слова в скінченному та зліченному алфавітах, вектори, матриці, реляції та таблиці.

ВИСНОВКИ

Роботу присвячено розвиненню абстрактної теорії мультимножин для застосування отриманих результатів в інформатиці.

Основні результати дисертаційної роботи.

1. Уточнено основні означення: мультимножини, характеристичної функції мультимножини, характеристик мультимножин (потужність, розмірність, піковий елемент, пікове значення), відношення включення мультимножин.
2. Визначено аналоги стандартних теоретико-множинних операцій над мультимножинами: об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення, прямого з'єднання. Визначено операції, що не є застосовними до абстрактних множин: додавання, добуток, множення числа на мультимножину.
3. Розглянуто властивості введених операцій: характеристика відношення включення в термінах операцій перетину та об'єднання мультимножин; ідемпотентність; комутативність; асоціативність; дистрибутивність; закони поглинання; аналоги законів подвійного заперечення та де Моргана.
4. Показано можливість використання співвідношень між операціями над мультимножинами в оптимізаційних блоках процесорів SQL-подібних мов.
5. Побудовано решітку мультимножин за частковим порядком включення. Дана решітка відповідає абстрактній решітці із сигнатурними операціями перетину та об'єднання.
6. Встановлено структуру частково впорядкованої множини мультимножин за відношенням включення.
7. Здійснено вкладення частково впорядкованої множини мультимножин у дві повні решітки, при цьому одна з цих повних решіток будується

шляхом узагальнення поняття мультимножини зняттям вимоги скінченності основ та кількості екземплярів елементів основ.

8. Проаналізовано денотаційну семантику рекурсивної форми CTE-запитів сучасних SQL-подібних мов.
9. Подано характеристику обчислюваності на скінченних множинах та мультимножинах: побудовано системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА.
10. Продемонстровано застосування алгебраїчного опису класу обчислюваних функцій над мультимножинами для моделювання ДНК-обчислень у біоінформатиці та алгоритмічних маніпуляцій над таблицями у сучасних СУБД.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити наступні висновки.

Досліджені властивості операцій над мультимножинами є наслідками властивостей теоретико-числових функцій $\min$, $\max$, $x \dot{-} y$, $|x-y|$, $sg(x)$. Операції додавання, перетину, різниці, з врахуванням та без врахування дублікатів, є адекватними уточненнями аналогів теоретико-множинних операцій над таблицями в СУБД.

Показано, що розглянута частково впорядкована множина мультимножин відноситься до відомих класів частково впорядкованих множин, а саме решіток, умовно повних множини, повних піврешіток. Решітка мультимножин допускає два простих та природних вкладення у повні решітки.

Показано, що знайдені системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА є спорідненими між собою (зокрема, вони містять предикат рівності, а їхні бінарні операції виникають із стандартних арифметичних операцій додавання та зрізаної різниці шляхом їх розповсюдження за допомогою конструкції повного образу).

Продемонстровано адекватність моделі ППА для репрезентативних предметних областей: ДНК-обчислення та маніпуляції над таблицями у сучасних СУБД.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Albert J. Algebraic properties of bag data types / J. Albert // Seventeenth International Conference on Very Large Data Bases: Barcelona, Spain, 1991. – P. 211–219.
2. Blizard W.D. The Development of Multiset Theory / Wayne D. Blizard // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, No. 1. – P. 36–66.
3. Bonchis C. Information Theory over Multiset / C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu // Research Institute "re-Austria", Institute of Computer Science, 2005.
4. Buy D. Multiset Bibliography. Methods of Multiset Lattice Construction / Dmitry Buy, Juliya Bogatyreva // Papers of 9th International Conference on Applied Mathematics, February 2–5, 2010. – Bratislava. – 2010. – P. 407–413.
5. Buy D. Structure of Partially Ordered Family of Multisets / Dmitry Buy, Juliya Bogatyreva // Proceedings of CSE 2010 International Scientific Conference on Computer Science and Engineering, September 20–22, 2010, Košice – Stará Ľubovňa, Slovakia. – P. 40–43.
6. Davey B.A. Introduction to Lattice and Order / B.A. Davey, H.A. Priestly. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 248 p.
7. DNA computing. [Електронний ресурс]: Wikipedia, the free encyclopedia. – Режим доступу: http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_computing.
8. Knuth D. Context-Free Multilanguages / Donald Knuth // Theoretical Studies in Computer Science. – Academic Press, 1992. – P. 1–13.
9. Lamperti G. On Multisets in Database Systems / G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147–215.
10. Libkin L. Query Language for Bags and Aggregates Function / L. Libkin, L. Wong // Journal of Computer and System Sciences. – 1997. – Vol. 55, No. 1. – P. 241–272.

11. Libkin L. Some Properties of Query Language for Bags / L. Libkin, L. Wong // Proceedings of 4th International Workshop on Database Programming Languages: New York, 1993. – P. 97–114.
12. Lloyd J. Programming with Multisets / J.W. Lloyd // Department of Computer Science University of Bristol, 1998.
13. Lloyd J. Programming with Sets and Multisets / J.W. Lloyd // Department of Computer Science University of Bristol, 1998.
14. Ross K. Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems / K.A. Ross, J. Stoyanovich // Proceedings of international conference "Very Large Database Endowment": August 31 – September 03, 2004. – Vol. 30. – P. 912–923.
15. Singh D. An Overview of the Applications of Multisets / D. Singh, A. Ibrahim, T. Yohanna, J. Singh // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 37, No. 2. – P. 73–92.
16. SQL: Операции [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://articles. org.ru/docum/sql_oper.php.
17. Syropoulos A. Mathematics of Multisets / Apostolos Syropoulos // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 347–358.
18. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: [пер. с англ.] / Хендрик Барендрегт. – Москва: Мир, 1985. – 606 с.
19. Башкин В.А. Подобие обобщенных ресурсов в сетях Петри [Електронний ресурс] / В.А. Башкин, И.А. Ломазова. – Режим доступу: http://lvk.cs.msu. su/files/ mco2005/ bashkin.pdf.
20. Биркгоф Г. Теория решеток / Гаррет Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.
21. Богатирьова Ю.О. Мультимножини: означення, характеристики, операції, властивості операцій / Ю.О. Богатирьова // Матеріали VI Всеукраїнської конференції молодих науковців "Інформаційні технології в освіті, науці і

техніці” (ІТОНТ-2008, Черкаси, 5–7 травня, 2008 р.). – Черкаси: ЧНУ, 2008. – С. 140.

22. Богатирьова Ю.О. Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах / Ю.О. Богатирьова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – №4. – С. 88–96.
23. Богатирьова Ю.О. Поняття мультимножини. Структура сімейства мультимножин / Ю.О. Богатирьова // Матеріали Тринадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, (Київ, 13–15 травня 2010 р.). – К.: НТУ “КПІ”. – 2009. – С. 60.
24. Богатырёва Ю.А. Мультимножества: библиография, решетка мультимножеств / Ю.А. Богатырёва // Матеріали 6-ї Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2009, Київ, 8–10 грудня 2009 р.). – Т. 2. – С. 13–20.
25. Богатырёва Ю.А. Мультимножества: обзор библиографии, построение решетки мультимножеств / Ю.А. Богатырёва // Проблеми програмування. – 2010. – № 2–3. Спеціальний випуск. – С. 68–71.
26. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры функций рациональных аргументов и значений / Д.Б. Буй, В.Н. Редько // Докл. АН УССР. Сер.: А. физ.-мат. и тех. науки. – 1985. – № 6. – С. 65–67.
27. Буй Д.Б. О вычислимых функциях, сильно сохраняющих β-денотаты / Д.Б. Буй // Методы реализации систем программирования. Сб. научн. тр. – Киев: Ин-тут кибернетики АН УССР. – 1989. – С. 49–54.
28. Буй Д.Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125–135.
29. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232–240.

30. Буй Д.Б. К вопросу о решетке мультимножеств / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Материалы X международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) / Под. ред. О.М. Касим-Заде. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2010. – С. 220–222.
31. Буй Д.Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д.Б. Буй, С.А. Поляков // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 183–194.
32. Буй Д.Б. Композиційна семантика рекурсивних запитів в SQL-подібних мовах / Д.Б. Буй, С.А. Поляков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – № 1. – С. 45−50.
33. Буй Д.Б. Мультимножества – альтернатива теоретико-множественной платформы в математических обоснованиях информационных технологий / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Information Model of Knowledge. – ITHEA №19. – P. 377–386.
34. Буй Д.Б. Мультимножества / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Материалы XVI Международной конференции “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU-2010, Ялта, 4–8 октября 2010 г.). – С. 149.
35. Буй Д.Б. Мультимножини як модель експертних оцінок / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції “Моделювання та прогнозування економічних процесів”, (Київ, 9–11 грудня, 2009 р.). – К.: НТУ “КПІ”. – 2009. – С. 44.
36. Буй Д.Б. Мультимножини: означення, операції, основні властивості / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Матеріали 5-ї Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2008, Київ, 22–26 вересня 2008 р.). – С. 23–26.
37. Буй Д.Б. Обчислюваність на мультимножинах / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Матеріали науково-практичної конференції, присвяченої 80-річчю фізико-математичного факультету (Кіровоград, 26

листопада 2010 р.). – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010. – С. 28–30.

38. Буй Д.Б. Огляд бібліографії по теорії мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Наукові записки НАУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2010. – Том 112. – С. 4–9.
39. Буй Д.Б. Побудова (повної) решітки мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Матеріали Дев'ятого Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", (Кіровоград, 16–17 квітня 2010 р.). – С. 18–20.
40. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры вычислимых функций / Д.Б. Буй, И.В. Редько // Кибернетика. – 1987. – №3. – С. 68–74.
41. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций / Д.Б. Буй, В.Н. Редько // Докл. АН УССР. Сер.: А. физ.-мат. и тех. науки. – 1984. – № 10. – С. 69–71.
42. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры. I / Д.Б. Буй, В.Н. Редько // Кибернетика. – 1984. – №4. – С. 1–7.
43. Буй Д.Б. Примитивные программные алгебры: дис. … кандидата физ.-мат. наук: 01.01.09 / Буй Дмитрий Борисович. – К., 1984. – 150 с.
44. Буй Д.Б. Проблемы полноты в классах вычислимых функций, сохраняющих денотаты / Д.Б. Буй, И.В. Редько // Программирование. – 1991. – № 4. – С. 56–68.
45. Буй Д.Б. Решетка мультимножеств [Електронний ресурс] / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Материалы Международной конференции "Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте", 28–30 мая 2009 г. – Режим доступу: raai.org/resurs/papers/kolomna2009/doklad/ Bui_Bogatyreva.doc.
46. Буй Д.Б. Решітка мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Материалы Международной конференция "Современные направления теоретических и прикладных исследований" (SWORD'2009, Одесса, 16–27 марта 2009 г.). – Т. 2. – С. 49–52.

47. Буй Д.Б. Структура семейства мультимножеств / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Матеріали 7-ї Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2010, 4–8 жовтня 2010 р.). – С. 121–125.
48. Буй Д.Б. Структура частично упорядоченного семейства мультимножеств / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Information Model of Knowledge. – ITHEA №19. – P. 387–391.
49. Буй Д.Б. Сучасний стан теорії мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – №1. – С. 51–58.
50. Буй Д.Б. Теория мультимножеств: библиография, применение в табличных базах данных / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – № 7(48). – 2010. – С. 56–62.
51. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дис. … доктора фіз.-мат. наук: 01.05.03 / Буй Дмитро Борисович. – К., 2002. – 365 с.
52. Буй Д.Б. Формальная модель ДНК-вычислений / Д.Б. Буй, Ю.А. Богатырёва // Матеріали Першого З'їзду “Медична та біологічна інформатика і кібернетика” (Київ, 23–26 червня 2010 р.). – С. 221.
53. Буй Д.Б., Редько И.В. Примитивные программные алгебры функций, сохраняющих денотаты / Д.Б. Буй, И.В. Редько // Докл. АН УССР. Сер.: А. – 1988. – № 9. – С. 66–68.
54. Бурбаки Н. Теория множеств / Н. Бурбаки. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
55. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных [пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: Вильямс, 2004. – 1088 с.
56. Губский Б.В. Полнота в классах многоместных функций и предикатов / Б.В. Губский // Методы реализации систем программирования. Сб. научн. тр. – Киев: Ин-тут кибернетики АН УССР. – 1989. – С. 46–49.
57. Губский Б.В. Примитивные программные алгебры вычислимых функций и предикатов на реляциях и таблицах в счетном и конечном алфавитах /

Б.В. Губский, Е.В. Крапива, И.В. Редько // Докл. АН УССР. Сер.: А. физ.-мат. и тех. науки. – 1988. – № 10. – С. 78–79.

58. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций: [пер. с англ., ил.] / Найджел Катленд. – Москва: Мир, 1983. – 256 с.
59. Кнут Д. Искусство программирования: [2 том, 3-е изд.: пер. с англ.] / Дональд Кнут. – Москва: Вильямс, 2000. – 832 с.
60. Кузнецов С.Д. Концептуальное проектирование реляционных баз данных с использованием языка UML [Електронний ресурс] / С.Д. Кузнецов. – Режим доступу: ftp://ftp.dol.ru/pub/users/cgntv/download/sbornic/sbornic9/Doc13.doc.
61. Кузнецов С.Д. Оптимизация запросов: вечнозеленая область [Електронний ресурс] / С.Д. Кузнецов. – Режим доступу: http://citforum.ru/database/articles/sql_optimization.shtml.
62. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – Москва: Мир, 1970. – с. 415.
63. Малинецкий Г.Г. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства [Електронний ресурс] / Г.Г. Малинецкий, С.А. Науменко. – Режим доступу: http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep57/prep2005_57.html.
64. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.
65. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1965. – 391 с.
66. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1986. – 367 с.
67. Мальцев А.И. Конструктивные алгебры. I / А.И. Мальцев // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, №3. – С. 3–60.
68. Наиболее интересные новшества в стандарте SQL:2003 [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.nestor.minsk.by/sr/2004/03/40331.html.

69. Петровский А.Б. Основные понятия теории мультимножеств / А.Б. Петровский. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 80 с.
70. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств / А.Б. Петровский. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
71. Редько В.Н. Императивные программные логики (основные результаты и открытые проблемы) / В.Н. Редько // Тезисы докладов II Всесоюзной конференции по автоматизации производства ППП и трансляторов. – Т.: изд. Таллиннского политех. ин-та, 1983. – С. 109–111.
72. Редько В.Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
73. Редько В.Н. Универсальные программные логики и их применение / В.Н. Редько // Труды Всесоюзного симпозиума по теоретическому и системному программированию. – К.: Штиица, 1983. – С. 310–326.
74. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – Москва: Мир, 1980. – 476 с.
75. Сети Петри [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.iacp.dvo.ru/lab_11/otchet/ot2000/pn3.html#top.
76. Скорняков Л.А. Элементы алгебры [2-е изд.] / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.
77. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.
78. Славин О.А. Использование мультимножеств в распознавании символов / О.А. Славин // Труды института системного анализа российской академии наук. – 2006. – Т. 23. – С. 198–205.
79. Сухольский Г.В. Математические методы в психологии / Г.В. Сухольский. – Харьков: ФОЛИО, 2004. – 282 с.